Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
mei

Euclides 8

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof. dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof. dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030-78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 RR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Euclides, de computer en het wiskundeonderwijs

Cor Nagtegaal

Inleiding

Enkele jaren geleden bood de lerarenopleiding waar ik werkte, naast een groot aantal informatica-nascholingscursussen, ook een nascholingscursus De Computer in het Wiskundeonderwijs aan. In totaal kwamen er dat jaar zo'n 1700 cursusaanmeldingen binnen (tja, voor maar 400 plaatsen), maar voor de computers & wiskundecursus waren er slechts... 13 belangstellenden. Alleen door combinatie met een andere lerarenopleiding kon de cursus doorgaan. Toch waren er bij die 1700 vele, vele wiskundeleraren.

Nu werk ik bij het NIVO-project en heb ik enig zicht op hoe de belangstelling thans ligt: uit een recente peiling onder de NIVO-cursisten blijkt dat 71% van de wiskundedocenten die nu een basiscursus doen (veel) belangstelling heeft voor een vervolgcursus, gericht op het gebruik van informatietechnologie in het eigen vakonderwijs, terwijl maar 38% (er is enige overlap) door wil gaan met een informatica-vervolg. Ook bij de andere vakken ligt de belangstelling zo.

Toekomst voor de computer in het vakonderwijs
Zijn we met z'n allen uitgekeken op informatica? Of beginnen we werkelijk toekomst te zien in het ondersteunende gebruik van de computer bij het onderwijs in ons vak? Er zijn aanwijzingen voor het laatste.
Nu met het NIVO-project, min of meer geforceerd, in het Nederlandse Voortgezet Onderwijs standaardisatie op apparatuur een feit aan het worden is, en er stimuleringsmaatregelen zijn aangekondigd voor de markt voor educatieve software, wordt het voor educatieve uitgevers en softwarehuizen in principe interessant om deze markt te betreden. Van de kant van de overheid is het ontbreken van goede educatieve software, die op regelmatig gebruik in de klas kan rekenen, als een van de grote knelpunten voor de komende jaren gedefinieerd: men is ook bereid om er met een gerichte inspanning iets aan te doen.
Stimulering van één kant af is natuurlijk zinloos als de draad aan de andere kant niet wordt opgepakt. Gelukkig is daar geen sprake van. Ik noemde al de belangstelling van de zijde van leraren voor nascholing op dit terrein, maar ook het aanleveren van ideeën voor educatieve software begint op gang te komen, en zonder zo'n –constante– ideeënstroom gaat het niet.

Wiskunde in een uitzonderingspositie?

Wiskunde is misschien wel weer een speciaal vak op dit gebied: niet alleen leent het vak zich bij uitstek voor bijvoorbeeld het toepassen van de computer voor (veel) rekenwerk of voor grafische toepassingen, maar ook voor ondersteuning op het gebied van het verwerven van concepten. Denk bijvoorbeeld aan het variabele-begrip, of aan de parallel tussen het opstellen van een algoritme en het schrijven van een bijpassend computerprogramma.
Voor het vak wiskunde zijn (korte) programma's te maken, waarin een wiskundig probleem wordt opgelost en waarbij de totstandkoming van het programma iets leert over de aard van het probleem en zijn oplossing. Vaak zijn die programma's in samenwerking met de klas te schrijven (zeker als het om de analyse van het probleem gaat). Zulke programma's mogen zich in de VS en in Engeland in enige populariteit verheugen (ze worden daar 'short-liners' genoemd) en ook in Nederland is een toenemend gebruik van short-liners te constateren.

New Math of iets anders?

Er is nog iets. Doen de zinnetjes:

which (x : x is-deler-van 68)
of: which (x, y : x is-broer-van y)

u niet erg aan relaties en aan de verzamelingenbouwer denken? Het gaat hier echter om een vraag (een zogenaamde 'query') binnen de computer-taal PROLOG (afkorting van PROgramming in LOGic). Als de relaties is-deler-van en is-broer-van maar fatsoenlijk gedefinieerd zijn, dan krijgt u nog het juiste antwoord ook. Er gaan stemmen op die zeggen dat de informatica op den duur invloed zal hebben op het wiskundeonderwijs in de vorm van het nieuw leven inblazen van onderwerpen als verzamelingen, relaties en dergelijke. U dacht er net vanaf te zijn? Misschien dat talen als PROLOG (en bv. ook SQL, een 'query'-taal voor databanken) de juiste context bieden.

Een nieuwe rubriek in *Euclides*

Euclides is van plan om de komende jaren systematisch aandacht te gaan besteden aan de computer in het wiskundeonderwijs. Een enkele keer zal dat in de vorm van een beschouwing zijn over bijvoorbeeld de invloed van informatica op het wiskundeonderwijs, of over verschil en overeenkomst tussen het variabele-begrip in de wiskunde en in de informatica.
Maar in de meeste gevallen zal de nadruk niet liggen op informatica, maar op de directe bruikbaarheid van de computer in de klas. Bespreking van software die al klaar is (en verkrijgbaar), of bespreking van goede ideeën die nog in software beschikbaar moeten komen. We laten voorbeelden van en ideeën voor short-liners zien, of spreadsheet-modellen bij wiskunde-A, of computergebruik bij statistiek, of het gebruik van de grafische mogelijkheden van de computer, etcetera.
Zonder uw hulp zal het niet gaan: ik wil niet alleen de nieuwe rubriek in uw aandacht aanbevelen, maar u tevens oproepen uw eigen ideeën op dit gebied aan de redactie te zenden. Als uw artikel kant en klaar is, is het mooi, maar het hoeft niet: de redactie is gaarne bereid alle ondersteuning te bieden of desnoods zelf het artikel rond uw idee te schrijven.

Boekbesprekingen

P.R. Gribik, K.O. Kortanek, *Extremal methods of operation research,* Marcel Dekker, New York, $45.00, 328 pag.

Het boek is ingedeeld in drie hoofdstukken, te weten:
1 Het distributie-transport probleem
2 Introductie in netwerk modellen
3 Lineair Programmeren

Ieder hoofdstuk is voorzien van een groot aantal opgaven waarvan aan het eind van het boek oplossingen zijn opgenomen (vanaf blz. 213).
Toch moet door een vrij ondoorzichtelijke behandeling van de stof dit boek als een niet erg goed leerboek over lineaire programmering worden gezien.

Harm Bakker

C.J. Date, *Database, een inleiding,* Academic Service, ƒ39,90, 279 blz.

Dit boek is geschreven voor gebruikers van databases. Het laat aan de hand van een groot aantal voorbeelden zien wat voor mogelijkheden een geautomatiseerd gegevensbestand kan bieden. In de eerste hoofdstukken van het eerste gedeelte wordt SQL als querytaal gebruikt, verderop komen ook Query By Example, NOMAD en dBASE II ter sprake. Dit alles is voorzien van een flink aantal oefeningen, waarvan tevens uitwerkingen zijn opgenomen.
In het tweede deel wordt wat meer ingegaan op het ontwerpen en beheren van een database. Begrippen als index, view, integriteit en blokkades worden op inzichtelijke wijze uiteengezet. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan beveiliging.
Zoals gezegd een boek voor gebruikers. Problemen aangaande implementaties worden niet genoemd.
Gezien de nog steeds toenemende populariteit van personal computers en de daarop beschikbare database-systemen een zeer aanbevelenswaardig boek.

Harm Bakker

Educatieve Operations Research Software: Wis en Waarachtig

H. C. Tijms

1 Inleiding

Educatieve en gebruikersvriendelijke software die op functionele wijze in het wiskunde onderwijs gebruikt kan worden is nog steeds een schaars goed, alle ontwikkelpunten voor educatieve programmatuur en centra voor informatietechnologie ten spijt. Een sterk gecentraliseerde en bureaucratische aanpak van het softwareprobleem kan naar mijn mening niet werken in de praktijk. Om te laten zien dat het anders kan maar ook uit een behoefte te tonen welk een boeiende en praktisch toepasbare wiskunde een rol speelt in de operations research, heb ik in het kader van een afstudeerprojekt een student educatieve software laten ontwikkelen voor een aantal wiskundige concepten en methoden. Deze software sluit enerzijds goed aan bij het wiskunde onderwijs in de hoogste klassen van het vwo en geeft anderzijds een beeld van in de praktijk gebruikte wiskunde. Tijdens de uitvoering van het projekt heb ik ervaren dat de ontwikkeling van educatieve software, die werkelijk gebruikersvriendelijk is, minder eenvoudig en meer tijdrovend blijkt te zijn dan men geneigd is te veronderstellen. Nodig is een combinatie van vakkennis op het betreffende gebied en speciaal programmeertalent om deze kennis in een instructief en gebruikersvriendelijk pakket om te zetten. Deze combinatie van vaardigheden is met name op de universiteit te realiseren, mits men als docent attent is op de specifieke capaciteiten van zijn studenten. Ik ben ervan overtuigd dat ook op andere vakgebieden educatieve software van niveau ontwikkeld kan worden door een combinatie van een ervaren docent als begeleider en een gemotiveerde student als uitvoerder. Bij de ontwikkeling van ons educatieve softwarepakket is nauw overleg geweest met een aantal wiskundeleraren om te voorkomen dat een schoolvreemd produkt zou worden gemaakt. Uit deze contacten kwamen waardevolle suggesties, zoals de suggestie in elk geval ervoor te zorgen dat de leerling de mogelijkheid heeft om op creatieve wijze te experimenteren met de interactieve programmatuur. Mede ingegeven door dit wederzijds nuttige contact zou ik het volgende idee willen opperen om met een kleinschalige opzet het educatieve softwareprobleem aan te pakken. In afzonderlijke vakgebieden zouden het vwo en de universiteit kunnen komen tot de formulering van een welomlijnd en overzienbaar projekt. Voor zo'n projekt zou bijvoorbeeld uit de informatica-stimuleringsgelden een prijsvraag voor het beste educatieve softwarepakket uitgeschreven kunnen worden tussen de verschillende universiteiten. Competitie is tenslotte de beste weg om tot kwaliteit te komen.

2 Het softwarepakket

De operations research, in ons land ook wel besliskunde genoemd, houdt zich bezig met het ontwikkelen en analyseren van wiskundige modellen waarmee in een groot aantal beslissingssituaties het besluitvormingsproces kan worden ondersteund. Het vakgebied operations research kan worden beschouwd als een tak van de toegepaste wiskunde en is aan de Nederlandse universiteiten dan ook ondergebracht binnen de studie econometrie of de studie wiskunde/informatica.

Het pakket 'Educatieve Operations Research Software voor de PC', geschreven door mijn student Erwin Kalvelagen, bestaat uit de volgende vier modules:

1 Lineaire Programmering,
2 Dynamische Programmering en het Kortste Pad Probleem,
3 De Wet van de Grote Aantallen,
4 De Centrale Limietstelling.

In het onderstaande zal op elk van deze modules worden ingegaan.

2.1 Lineaire Programmering

De Lineaire Programmering (LP) is één van de belangrijkste onderdelen van de operations re-

search. LP is in feite een wiskundige methode voor het vinden van een maximum (of minimum) van een lineaire doelfunktie in een veelal groot aantal beslissingsvariabelen die moeten voldoen aan een aantal lineaire bijvoorwaarden. Zonder overdrijving kan gesteld worden dat in de praktijk LP één van de meest gebruikte wiskundige technieken is. Lineaire programmering vindt toepassing in talrijke beslissingssituaties. Toepassingen zijn bijvoorbeeld produktieplanning waarin een optimale toewijzing van schaarse grondstoffen aan produktieprocessen berekend moeten worden, het opstellen van dienstroosters voor vervoersbedrijven, het samenstellen van optimale produktmengsels in onder meer de veevoeder- en olieindustrie, het opstellen van transportschema's om winkels te bevoorraden vanuit één of meer depots, etc.
De algemeen wiskundige formulering van het LP-probleem luidt:

maximaliseer $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

onder de bijvoorwaarden

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... a_{in}x_n \leqslant b_i \text{ voor } i = 1, ..., m_1$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... a_{in}x_n \geqslant b_i \text{ voor } i = m_1 + 1, ..., m_2$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... a_{in}x_n = b_i \text{ voor } i = m_2 + 1, ..., m$$
$$x_i \geqslant 0 \text{ voor } i = 1, ..., n,$$

waarbij de a_{ij}, b_i en c_j gegeven data zijn. Zowel de doelfunktie als de bijvoorwaarden zijn lineair in de beslissingsvariabelen $x_1, ..., x_n$, vandaar de term *lineair* programmeringsprobleem. De term 'programmering' is in feite een synoniem voor 'optimalisering' en slaat niet op computerprogrammering. Niettemin vervult de computer een onmisbare rol bij het oplossen van LP-problemen, zoals in het algemeen de toepassingsgerichte informatica een wezenlijk bestanddeel is van de operations research.
Een grafische oplossing van een LP-probleem is alleen uitvoerbaar als het aantal variabelen niet meer dan 3 is. In praktische toepassingen is het aantal variabelen zelden gelijk aan 2 of 3 maar loopt al snel in de tientallen of in de honderden (voor produktieproblemen uit de olieindustrie zijn zelfs tienduizenden variabelen niet ongewoon). In de praktijk wordt de oplossing van een LP-probleem dan ook niet berekend met een geometrische procedure maar met een algebraïsche procedure die iteratief van aard is. Deze iteratieve oplosmethode heet de *simplexmethode* en is in 1947 door de Amerikaanse wiskundige G.B. Dantzig ontwikkeld. De simplexmethode vereist het gebruik van de computer, ook voor problemen van bescheiden grootte. Hoewel de simplexmethode in wezen niet moeilijker uit te leggen is dan de verwante Gauss-eliminatiemethode voor het oplossen van lineaire vergelijkingen, ben ik van mening dat voor onderwijsdoeleinden het de voorkeur verdient de nadruk te leggen op de toepassing van de simplexmethode en niet op de werking ervan. Het vertalen van een verbaal gesteld optimaliseringsprobleem naar een wiskundig LP-model en het analyseren van dit model op de microcomputer beschouw ik als een zeker zo nuttige training in wiskundig denken als het ingaan op de wiskundige theorie van de simplexmethode. De vertaling van een specifieke situatie naar een wiskundig model ligt ten grondslag aan het oplossen van elk praktisch probleem. Het bouwen van een wiskundig model is bepaald geen triviale bezigheid maar vereist een behoorlijk wiskundig inzicht.
Lineaire programmering is bij uitstek geschikt om de leerling te oefenen in de kunst van het bouwen van een wiskundig model. Als de leerling van een verbaal gesteld probleem het wiskundig LP-model opgesteld heeft, kan vervolgens het computerprogramma 'SIMOPT' voor lineaire programmering gebruikt worden. Als invoer wordt gevraagd de doelfunktie gevolgd door de bijvoorwaarden. Het programma rekent het model door en geeft op het scherm als uitvoer de optimale oplossing. Het programma biedt de leerling ook de mogelijkheid voor het doen van gevoeligheidsanalyse, d.w.z. na te gaan hoe de oplossing van het probleem verandert als de gegevens van het probleem gevarieerd worden. Anders gesteld, de leerling kan met het programma vragen beantwoorden zoals 'hoeveel zou de totale winst toenemen als een extra eenheid van een bepaalde grondstof ter beschikking zou zijn?' of 'hoeveel mag de winstcoëfficiënt van een bepaald produkt afnemen wil het winstgevend blijven dit produkt te maken?', etc. Voor nadere details verwijs ik naar het lesmateriaal behorende bij de diskette. Het computerprogramma kan ook gebruikt worden om stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen door willekeurig een doelfunktie te kiezen.

Ter illustratie geef ik het volgende voorbeeld van een LP-probleem. Een investeerder heeft honderdduizend gulden tot zijn beschikking die geïnvesteerd kunnen worden in een tweetal verschillende oliebedrijven O_1 en O_2, in een tweetal verschillende staalbedrijven S_1 en S_2, en in staatsobligaties. Voor deze vijf investeringsmogelijkheden zijn de (geschatte) rendementen op jaarbasis gelijk aan respectievelijk 7.3%, 10.3%, 6.4%, 7.5% en 4.5%. Uit risico-overwegingen wil de investeerder noch in de staalindustrie noch in de olie-industrie meer dan 50% van zijn kapitaal investeren. Daarnaast wil hij dat de investering in de staatsobligaties tenminste 25% bedraagt van de totale investering in de staalindustrie, terwijl de investering in het risicovolle oliebedrijf O_2 niet meer dan 60% mag bedragen van de totale investering in de olie-industrie. Hoe moet de investeerder zijn kapitaal investeren opdat het totale rendement op jaarbasis maximaal is gegeven de gestelde restricties? Dit probleem kan vertaald worden in een LP-model met vijf beslissingsvariabelen $x_1, ..., x_5$ die aangeven de respectie-

```
SIMOPT Version 2.0                         IEOR  VU Amsterdam  2/24/1987

The following model was read:

Object-Function :
   MAX  0.0730 X1 +0.1030 X2 +0.0640 X3 +0.0750 X4 +0.0450 X5
Subject to :
   1.  1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 +1.0000 X5 <= 100.0000
   2.  1.0000 X1 +1.0000 X2 <= 50.0000
   3.  1.0000 X3 +1.0000 X4 <= 50.0000
   4. -0.2500 X3 -0.2500 X4 +1.0000 X5 >=  0.0000
   5. -0.6000 X1 +0.4000 X2 <=  0.0000

  Summary of Results

  Value Objectfunction :          8.000

               Activity Level   Reduced Cost
  X1       :          20.000        0.000
  X2       :          30.000        0.000
  X3       :           0.000        0.011
  X4       :          40.000        0.000
  X5       :          10.000        0.000

 Shadow Prices
 Constraint 1           0.069
 Constraint 2           0.022
 Constraint 3           0.000
 Constraint 4          -0.024
 Constraint 5           0.030

 Cost coefficient ranging

 Coefficient      Value        Interval
  1.              0.073        [    0.0180 ,     0.1030 ]
  2.              0.103        [    0.0730 ,   Infinity ]
  3.              0.064        [ -Infinity ,     0.0750 ]
  4.              0.075        [    0.0640 ,     0.1025 ]
  5.              0.045        [   -0.3000 ,     0.0750 ]

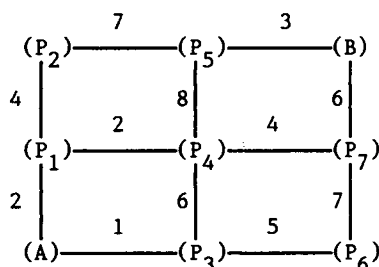
  Accuracy Check Passed.
```

Figuur 1 De computer output van een LP-model

velijke bedragen te investeren in de vijf beleggingsmogelijkheden. Voor het gemak en uit schalingsoverwegingen nemen wij duizend gulden als geldseenheid en drukken de variabelen dan ook uit in eenheden van duizend gulden. De doelfunktie en de bijvoorwaarden in de beslissingsvariabelen worden gegeven in figuur 1. Deze figuur is een 'screendump' van de computer output van het LP-model dat opgelost is met SIMOPT waarbij tevens de optie van gevoeligheidsanalyse gebruikt is. Uit de computer output blijkt dat de optimale investering bestaat uit 20 duizend gulden in oliebedrijf O_1, 30 duizend gulden in oliebedrijf O_2, niets in staalbedrijf S_1, 40 duizend gulden in staalbedrijf S_2 en 10 duizend gulden in staatsobligaties. Het maximale rendement op jaarbasis is 8 duizend gulden. De lineaire programmering output geeft niet alleen de optimale oplossing, maar bevat ook een schat aan extra informatie. Bijvoorbeeld, de 'reduced cost' 0.011 bij variabele x_3 geeft aan dat bij gelijkblijvende overige parameters het rendement van staalbedrijf S_1 tenminste 1.1% groter zou moeten zijn wil het interessant worden in dit bedrijf te investeren. De 'shadow price' 0.022 bij bijvoorwaarde 2 leert ons dat het maximaal te behalen rendement bij benadering met 22 gulden zou afnemen als de eis van hooguit 50% kapitaalinvestering in de olie-industrie aangescherpt wordt tot de eis van hooguit 49%. De 'cost coefficient range' [0.073, infinity] behorende bij de rendementscoëfficiënt van variabele x_2 geeft aan dat de optimale oplossing onveranderd blijft zolang het rendement van oliebedrijf O_2 tenminste 7.3% is. Deze laatste informatie bijvoorbeeld is van belang als men niet de precieze waarde van het rendement van oliebedrijf O_2 weet. In het kader van dit artikel kan ik niet ingaan op de achtergronden van de simplex-algoritme en de gevoeligheidsanalyse, maar verwijs ik naar het uitnemende leerboek V. Chvatal, *Linear Programming*, Freeman & Co, San Francisco, 1985.

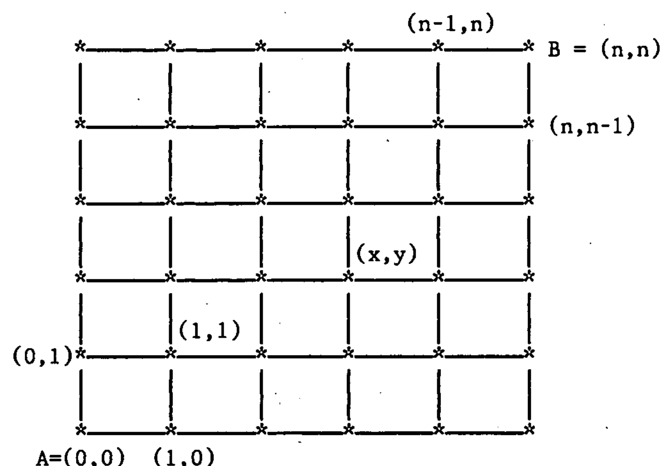
2.2 Dynamische programmering en het kortste pad probleem

Recursiviteit is een kernbegrip in de moderne wiskunde en in de informatica. Door middel van recursieve relaties is het vaak mogelijk om een op het eerste gezicht moeilijk probleem te splitsen in een reeks van deelproblemen die elk eenvoudig op te lossen zijn. Het kortste pad probleem is bijzonder geschikt om de leerling de essentie van recursieve algoritmen bij te brengen en tevens de beperkingen en de kracht van de computer te tonen. In het softwarepakket wordt het kortste pad probleem opgelost met behulp van dynamische programmering. De dynamische programmering is een recursieve rekenmethode die in de jaren vijftig door de wiskundige Richard Bellman ontwikkeld is voor het oplossen van meer-staps beslissingsproblemen waarin een reeks van samenhangende beslissingen bepaald moet worden. Bijvoorbeeld te denken valt aan een produktie/voorraadprobleem waarin voor een aantal opeenvolgende weken de produktieniveau's berekend moeten worden zodat de totale produktie- en voorraadkosten minimaal zijn.
Het berekenen van een kortste pad in een netwerk is het prototype van een dynamisch optimaliseringsprobleem. In het computerprogramma wordt het kortste pad berekend in een netwerk dat een struktuur heeft als geschetst in figuur 2. In veel Amerikaanse steden heeft het stratenplan een dergelijke struktuur.



Figuur 2 Een kortste pad probleem

Het getal bij elk lijnstuk in figuur 2 geeft de reistijd (reisafstand) langs het betreffende lijnstuk aan. Stel dat een reiziger van beginpunt A naar eindpunt B wil gaan volgens de route met de kleinste totale reistijd. Hierbij veronderstellen wij dat in elk knooppunt de reiziger naar rechts of omhoog moet gaan, m.a.w. de reiziger mag geen 'slingers' maken. In het voorbeeld van figuur 2 kan de kortste route eenvoudig bepaald worden door complete aftelling (in totaal zijn slechts 6 routes naar A en B mogelijk en de kortste is: $A \to P_1 \to P_4 \to P_7 \to B$ met een totale reistijd van 14). Deze 'brute force approach' waarin voor elke route afzonderlijk de totale reis-



Figuur 3 Een n bij n netwerk

tijd wordt berekend, is niet meer praktisch uitvoerbaar bij grotere netwerken, zelfs als een supercomputer wordt ingeschakeld. Om dit aan te tonen beschouwen wij nu een n bij n netwerk, vgl. figuur 3 met $n = 5$. Om notationele redenen die hieronder duidelijk zullen worden, wordt elk roosterpunt op natuurlijke wijze genummerd als (x, y) met x en y geheel, waarbij $A = (0, 0)$ en $B = (n, n)$. Wij zullen eerst bepalen hoeveel paden van A naar B mogelijk zijn in een n bij n netwerk. Elk pad van A naar B bestaat uit $2n$ lijnstukken waarbij in het pad de reiziger precies n keer omhoog gaat (en n keer naar rechts). Dus het totale aantal paden van A naar B is gelijk aan het aantal verschillende manieren waarop uit $2n$ elementen er n gekozen kunnen worden. Hieruit volgt dat het totale aantal paden van A naar B gelijk is aan $\binom{2n}{n}$. Om een ordegrootte van dit aantal te vinden passen wij de beroemde benaderingsformule van Stirling toe. Deze formule luidt: $n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ voor $n \to \infty$, waarbij $f(x) \sim g(x)$ voor $x \to \infty$ betekent $f(x)/g(x) \to 1$ als $x \to \infty$. Voor praktische doeleinden is deze formule al goed genoeg vanaf n = 10. Met behulp van Stirlings formule vinden wij

$$\text{het totale aantal paden van } A \text{ naar } B \sim (\pi n)^{-\frac{1}{2}} 2^{2n}.$$

Voor elk pad zijn $2n$-1 optellingen nodig om de totale reistijd te vinden. Dus bij complete aftelling geldt

$$\text{het totale aantal bewerkingen} \sim (n/\pi)^{\frac{1}{2}} 2^{2n+1}.$$

Nemen wij een zeer snelle supercomputer die 100 miljoen bewerkingen per seconde kan uitvoeren, dan zien wij dat bijvoorbeeld voor $n = 30$ (bepaald geen grote waarde in de praktijk) de computer bij benadering

$$\frac{7.1 \times 10^{18}}{365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 10^{8}} \text{ jaar}$$

nodig heeft, oftewel meer dan 2000 jaar!

Bovenstaande complexiteitsanalyse leert overduidelijk dat ook bij beschikbaarheid van een snelle computer een 'slimme' aanpak nodig is om het kortste pad te berekenen. Zo'n aanpak wordt geleverd door de dynamische programmering. Om deze aanpak te beschrijven, noteren wij de reistijd van de directe verbinding $(x, y) \to (x + 1, y)$ als $t_r(x, y)$ en de reistijd van de direkte verbinding $(x, y) \to (x, y + 1)$ als $t_0(x, y)$. Voor gegeven getalwaarden voor $t_r(x, y)$ en $t_0(x, y)$ is het doel het kortste pad van het beginpunt $A = (0, 0)$ naar het eindpunt B te berekenen. Dit 'moeilijke' probleem is door middel van een recursieve relatie te splitsen in een reeks van 'makkelijke' problemen. Om dit toe te lichten beschouw het probleem van de berekening van het kortste pad naar B vanuit een willekeurig uitgangspunt (x, y). Dit kortste pad probleem is triviaal op te lossen voor zowel het uitgangspunt $(n - 1, n)$ en het uitgangspunt $(n, n - 1)$, de lengten van de kortste paden zijn dan respectievelijk $t_r(n - 1, n)$ en $t_0(n, n - 1)$. Vervolgens kan het kortste pad naar B vanuit het uitgangspunt $(n - 1, n - 1)$ eenvoudig berekend worden. Meer algemeen zullen wij laten zien dat het kortste pad naar B vanuit het uitgangspunt (x, y) eenvoudig berekend kan worden als de kortste paden naar B vanuit de uitgangspunten $(x + 1, y)$ en $(x, y + 1)$ bekend zijn. Daartoe definiëren wij de waardefunktie

$f(x, y)$ = de lengte van het kortste pad van (x, y) naar B.

In feite zoeken wij $f(0,0)$. Deze wordt gevonden door $f(x,y)$ op recursieve wijze uit te rekenen voor alle x, y, waarbij $f(x,y)$ berekend wordt met behulp van de eerder berekende waarden $f(x, y+1)$ en $f(x+1, y)$. Daartoe gaan wij als volgt te werk. Wij rekenen uit de lengten van de volgende twee paden. Het pad van (x, y) naar B bestaande uit de direkte verbinding $(x,y) \rightarrow (x, y+1)$ en uit het optimale pad van $(x, y+1)$ naar B, heeft als lengte $t_0(x,y) + f(x, y+1)$, terwijl het pad van (x,y) naar B bestaande uit de direkte verbinding $(x,y) \rightarrow (x+1, y)$ en uit het optimale pad van $(x+1, y)$ naar B als lengte heeft $t_r(x,y) + f(x+1, y)$. Als wij nu van deze twee paden van (x,y) naar B het pad met de kleinste lengte nemen, dan leert enig nadenken dat wij het kortste pad van (x,y) naar B gevonden hebben. Dit leidt tot de recursie relatie

$$f(x,y) = \min\{t_0(x,y) + f(x, y+1),\\ t_r(x,y) + f(x+1, y)\}. \qquad (1)$$

Deze relatie geldt alleen voor de 'inwendige' punten (x,y). Voor de randpunten geldt $f(n,y) = t_0(n, y+1) + f(n, y+1)$ en $f(x,n) = t_r(x,n) + f(x+1, n)$, waarbij per definitie $f(n,n) = 0$. Startend met $f(n,n) = 0$, kan de waardefunktie $f(x,y)$ van 'achteren naar voren' uitgerekend worden totdat $f(0,0)$ berekend is. De waarde $f(0,0)$ geeft de lengte van het kortste pad van A naar B. Om de punten van dit kortste pad te vinden, moet bij de berekening van $f(x,y)$ onthouden worden voor welk van de akties 'ga omhoog' of 'ga naar rechts' het minimum in (1) aangenomen wordt. Verdere details en een uitgewerkt voorbeeld worden gegeven in het lesmateriaal bij de diskette.
De recursie relaties leiden tot een efficiënte algoritme. Voor de recursieve algoritme geldt dat het aantal bewerkingen van de orde $3(n+1)^2$ is (in de relatie (1) zijn 2 optellingen en 1 keer het minimum nemen nodig). Dit aantal bewerkingen is een enorm verschil met het aantal bewerkingen bij complete aftelling; bijv. voor $n = 30$ heeft bij complete aftelling een supercomputer met 10^8 operaties per seconde meer dan 2000 jaar aan rekentijd nodig, terwijl de recursieve algoritme op een 1000 keer zo langzame personal computer slechts 0.03 seconde nodig heeft.
Uit ervaring weet ik dat de recursieve aanpak zoals hierboven gegeven conceptueel moeilijk is voor degenen die daarmee voor het eerst in aanraking komen. Het kan even duren alvorens de recursie relatie, hoe simpel in wezen ook, volledig doorgrond wordt en het 'o-ja' effekt optreedt. Niettemin geloof ik dat het principe van de recursieve aanpak vrij snel aan de wiskundig rijpere leerling duidelijk kan worden gemaakt. In feite is de recursieve aanpak slechts een kwestie van gezond verstand!
Het computerprogramma 'DP' is gebaseerd op de recursief dynamisch programmeringsalgoritme. Als invoer wordt gevraagd de dimensie van het netwerk en de direkte afstanden (de leerling kan deze afstanden door het programma ook 'at random' laten genereren). Het programma berekent het optimale pad en tekent dit in het netwerk. De algoritme berekent in feite het kortste pad voor elk mogelijk startpunt. Door met een cursor-toets over het scherm te wandelen, kan het kortste pad vanuit elk gewenst startpunt op het scherm getoond worden. Tenslotte wordt opgemerkt dat het programma ook de optie heeft het 'veiligste' pad te berekenen voor de volgende situatie. Stel nu dat het netwerk een communicatienetwerk voorstelt waarin een boodschap van A naar B gestuurd moet worden over een route waarop de kans op storing van de boodschap zo klein mogelijk is. In dit geval vereist de invoer dat de getallen bij de lijnstukken tussen 0 en 100 liggen omdat dan het getal bij een lijnstuk de kans in procenten aangeeft dat langs dit lijnstuk geen storing optreedt. In het computerprogramma worden $t_0(x,y)$ en $t_r(x,y)$ gelijk gekozen aan de getallen bij de betreffende lijnstukken gedeeld door 100. De waardefunktie $f(x,y)$ wordt nu gedefinieerd als de maximale kans om een boodschap zonder storing van (x,y) naar B te krijgen. Bedenken wij tevens dat de kans op geen storing langs een pad gelijk is aan het produkt van de kansen op geen storing langs de lijnstukken van het pad, dan zal het duidelijk zijn dat het computerprogramma slechts een geringe aanpassing behoeft. In bovenstaande recursierelaties moet de min-operator vervangen worden door de max-operator, het plus-teken door het maal-teken en de randvoorwaarde $f(n,n) = 0$ door $f(n,n) = 1$. Dit toont hoe flexibel de recursieve aanpak van de dynamische programmering is.

2.3 De wet van de grote aantallen

Kansrekening is evenals de meetkunde een tak van de wiskunde die direkte aansluiting heeft met de dagelijkse werkelijkheid. Terwijl bij vrijwel elke leerling een natuurlijk gevoel voor geometrische concepten aanwezig is, moet geconstateerd worden dat de meeste leerlingen in het begin veel moeite hebben een goed gevoel voor kansrekening te ontwikkelen. De beschikbaarheid van de microcomputer biedt nieuwe mogelijkheden bij het onderwijzen van de basisconcepten uit de kansrekening. In het bijzonder computersimulatie, waarbij kansprocessen op de computer worden nagebootst, kan een uitermate instruktief hulpmiddel zijn om bij de leerling het kansrekenkundig inzicht te vergroten. Het computerprogramma 'DOBBEL' demonstreert op experimentele wijze dat voor een voldoend nauwkeurige schatting van (zweet)kansen het aantal daarvoor benodigde waarnemingen aanzienlijk groter kan zijn dan men zou verwachten. Door middel van computersimulatie wordt het gooien met een (zeskantige) dobbelsteen nagebootst. Het programma heeft zowel de optie te gooien met een zuivere dobbelsteen als de optie te gooien met een onzuivere dobbelsteen. De invoer is het aantal keren (N) dat met de dobbelsteen gegooid moet worden, terwijl in het geval van de laatstgenoemde optie de invoer ook specificatie van de kansen $p_1,...,p_6$ vereist. Hierbij is p_j de kans dat een willekeurige worp van de dobbelsteen j ogen geeft ($1 \leqslant j \leqslant 6$). Uiteraard $p_j = 1/6$ voor alle j wanneer de dobbelsteen zuiver is. De uitvoer bestaat uit een histogram dat voor $j = 1,..., 6$ het totale aantal malen $T_j(N)$ geeft dat een worp j ogen oplevert wanneer N worpen zijn uitgevoerd. Tevens worden voor $j = 1,...,6$ de zweetkansen $p_j(N) = T_j(N)/N$ afgedrukt. Op grond van de wet (of beter gezegd de stelling) van de grote aantallen komen de zweetkansen $p_j(N)$ uiteindelijk steeds dichter bij de werkelijke waarden p_j als N steeds groter wordt. Het programma demonstreert experimenteel dat door toevalsafwijkingen een ogenschijnlijk voldoend groot aantal worpen nog niet groot genoeg behoeft te zijn. Tevens wordt experimenteel getoond dat de grootte van het aantal worpen waarvoor de zweetkansen $p_j(N)$ de werkelijke waarden p_j voldoende dicht benaderen, sterk kan afhangen van de kansen p_j zelf. Een plaatje zegt in dit opzicht meer dan duizend woorden!

Het programma is gebaseerd op computer simulatie. De uitkomst van elke worp wordt gegenereerd met behulp van een trekking van een random generator. Op elke computer is een random generator aanwezig. Een random generator is een voorschrift dat een willekeurig (random) getal tussen 0 en 1 oplevert. Een worp geeft 1 punt als het getrokken random getal tussen 0 en p_1 ligt, geeft 2 punten als het random getal tussen p_1 en $p_1 + p_2$ ligt en, algemeen, geeft j punten als het random getal tussen $p_1 + ... + p_{j-1}$ en $p_1 + ... + p_j$ ligt. Voor het geval van een zuivere dobbelsteen is een meer efficiënte methode een trekking u van een random getal om te zetten in een uitkomst van een worp door 1 + entier ($6u$) te nemen als het aantal geworpen punten. Computer simulatie is niet alleen een geschikt hulpmiddel om de wet van de grote aantallen 'visueel' te tonen. Het biedt ook de mogelijkheid de leerling kansproblemen te laten aanpakken die een hoog realiteitsgehalte hebben. Dit soort problemen motiveert de leerling veel meer dan de klassieke 'Alice in Wonderland' problemen met ballen, hoeden en urnen (en soms met hoofdpijnverwekkende combinatoriek). In het lesmateriaal behorende bij de diskette zijn een aantal praktische projekten gegeven die in eerste instantie met behulp van computer simulatie kunnen worden opgelost zonder dat de leerling over een diepgaande kennis van de kansrekening behoeft te beschikken. Deze projekten zijn zo gekozen dat, na een oplossing bij benadering bepaald te hebben met computer simulatie, de leerling ook getoond kan worden hoe met een analytisch model de oplossing exact kan worden berekend. Het is belangrijk te beklemtonen dat een wiskundig model waarvoor een analytische oplossing bestaat veelal de voorkeur verdient boven een simulatie model. Een simulatie model is vaak tijdrovend en geeft alleen getallen, terwijl een wiskundig model zowel inzicht als getallen geeft.

Het bovenstaande kan worden geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld. Stel dat een fabrikant van chocoladerepen de omzet wil bevorderen door bij elke reep een foto van een popster in te sluiten. De foto's van m verschillende popsterren worden gebruikt, waarbij elke foto gemiddeld even vaak voorkomt. De leerling zou eerst gevraagd kunnen worden voor een gegeven waarde van m (bijv. $m = 10$) met behulp van computer simulatie

en de wet van de grote aantallen de verwachting te bepalen van het aantal repen dat iemand moet kopen om alle foto's te verzamelen (zonder te ruilen). Daarna zou de leerling getoond kunnen worden dat de oplossing eenvoudiger met een wiskundig model gevonden kan worden, waarbij het wiskundig model niet alleen de verwachting van het aantal te kopen repen geeft maar ook inzicht geeft in de kansverdeling van dit aantal. Definieer daartoe voor een vaste m de stochastische variabele U als het aantal te kopen repen totdat de m verschillende foto's bemachtigd zijn. De sleutel tot de oplossing is gelegen in de constatering dat de stochastische variabele U geschreven kan worden als $U = X_1 + ... + X_m$, waarbij X_i het aantal te kopen repen aangeeft om van $i - 1$ verschillende foto's te komen op i verschillende foto's. In het bijzonder $X_1 = 1$. Als eenmaal $i - 1$ verschillende foto's in bezit zijn, dan is de kans dat de volgende te kopen reep een nieuwe foto bevat gelijk aan $q_i = (N - i + 1)/N$. Enig nadenken leert nu dat de stochastische variabele X_i dezelfde kansverdeling heeft als het aantal keren dat met een onzuivere munt geworpen moet worden totdat voor het eerst kop verschijnt wanneer de kans dat een worp kop geeft gelijk q_i is. Dus de stochast X_i heeft de zogenoemde geometrische kansverdeling $P\{X_i = k\} = (1 - q_i)^{k-1}q_i, k = 1, 2, ...$. De verwachting en spreiding van deze kansverdeling zijn gelijk aan $\mu_i = 1/q_i$ en $\sigma_i = (1 - q_i)^{\frac{1}{2}}/q_i$ voor $i = 1, ..., m$. Op deze wijze vinden wij dat de verwachting en de spreiding van U, het totale aantal te kopen repen, gegeven worden door $E(U) = \Sigma_{i=1}^{m}\mu_i$ en $\sigma(U) = (\Sigma_{i=1}^{m}\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}$, waarbij de laatste gelijkheid gebruik maakt van het feit dat de stochasten $X_1, ..., X_m$ onderling onafhankelijk zijn. In feite kunnen wij meer zeggen over de kansverdeling van $U = X_1 + ... + X_m$. In de volgende paragraaf bespreken wij de centrale limietstelling die stelt dat de som van een voldoend groot aantal onafhankelijke stochasten bij benadering normaal verdeeld is. Dit betekent dat voor m voldoende groot het totale aantal te kopen repen bij benadering een normale kansverdeling heeft.

2.4 De centrale limietstelling

Het computerprogramma 'CENLIM' is bedoeld om op visuele wijze toe te lichten dat de normale kansverdeling met zijn bekende klokvormige kansdichtheidscurve een prominente rol in de toegepaste kansrekening speelt. Eén van de meest fundamentele resultaten uit de kansrekening is de centrale limietstelling die stelt dat de som van een voldoend groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen bij benadering een normale kansverdeling heeft. Dit resultaat verklaart het veelvuldig optreden van de normale verdeling in de praktijk. Bijvoorbeeld, de fout gemaakt bij het meten van een fysische grootheid heeft bij goede benadering een normale kansverdeling als de fout op te vatten is als de som van een groot aantal kleine stochastische afwijkingen (temperatuurschommelingen, onnauwkeurigheden bij het aflezen, etc.). Een toepassing van de centrale limietstelling in de operations research is de volgende. In voorraadsystemen van snellopende artikelen waarvoor de vraag stochastisch is, geldt dat de kansverdeling van de totale vraag in de levertijd van een aanvullingsorder van een artikel bij goede benadering normaal verdeeld is. Hiervan wordt in de praktijk gebruik gemaakt om een eenvoudig te hanteren formule te ontwerpen waarmee bepaald wordt wanneer de voorraad aangevuld moet worden onder de service-eis dat de kans op buiten voorraad raken tijdens de levertijd beneden een gespecificeerde waarde moet liggen.
De precieze formulering van de centrale limietstelling luidt als volgt. Stel dat $X_1, X_2, ...$ een rij van onafhankelijke stochastische variabelen is die eenzelfde kansverdeling met verwachting μ en spreiding σ bezitten, dan geldt voor elke X

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant X\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

In woorden, de som $X_1 + ... + X_n$ heeft bij goede benadering een normale kansverdeling met verwachting $n\mu$ en spreiding $\sigma\sqrt{n}$ als n voldoende groot is. Voor het bij benadering normaal verdeeld zijn van de som van een voldoend groot aantal stochastische variabelen is het essentieel dat deze

stochasten onafhankelijk zijn, maar is het niet essentieel dat ze dezelfde verwachting en dezelfde spreiding bezitten.
Evenals bij de wet van de grote aantallen rijst de vraag hoe groot n gekozen moet worden opdat de som $X_1 + ... + X_n$ inderdaad bij goede benadering normaal verdeeld is. Het computerprogramma laat zien dat het antwoord op deze vraag sterk kan afhangen van de onderliggende kansverdeling van de stochastische variabelen X_i. Daartoe is voor de stochastische variabele X_i genomen:

> X_i = het aantal punten dat de i^{de} worp met een dobbelsteen oplevert.

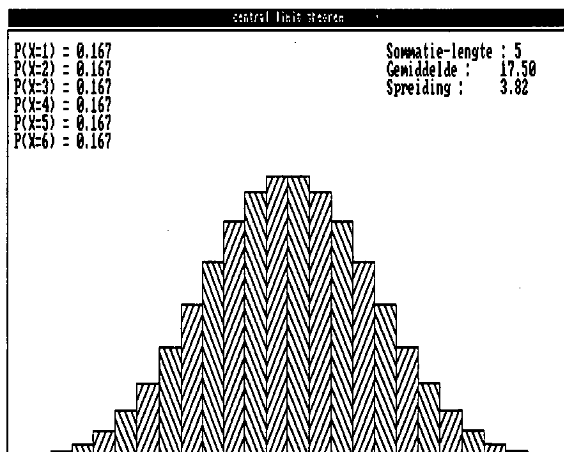
Dus het computerprogramma laat zien dat het staafdiagram van de kansverdeling van de totale som van het aantal punten behaald na n worpen met een dobbelsteen bij benadering de bekende klokvorm van de normale kansdichtheidscurve aanneemt als n voldoende groot is. Tevens wordt gedemonstreerd dat 'n voldoende groot' sterk kan afhangen van de onderliggende kansverdeling van het aantal punten dat een willekeurige worp oplevert, vgl. ook figuur 4. Het programma heeft zowel de optie van een zuivere dobbelsteen als de optie van een onzuivere dobbelsteen. De invoer vereist een specificatie van de waarde van n, het aantal worpen met de dobbelsteen, en van de kansen $p_1, ..., p_6$ ingeval van een onzuivere dobbelsteen. Hierbij is p_j de kans dat een willekeurige worp j punten oplevert. De uitvoer van het programma is een staafdiagram van de kansen

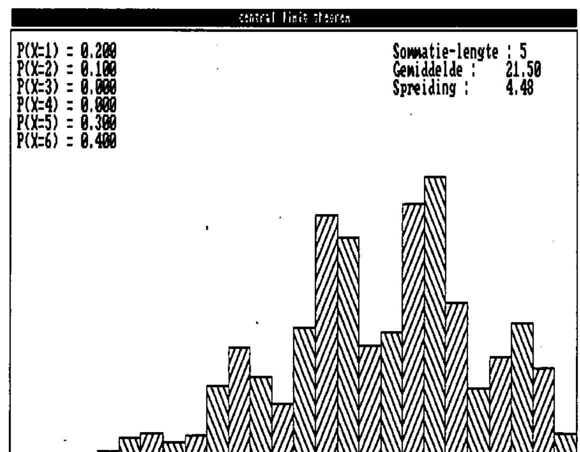
> $p_j^{(n)}$ = de kans dat de totale som van het aantal punten na n worpen gelijk aan j is, $j = n, ..., 6n$.

Tevens drukt het programma de verwachting en de spreiding van deze kansverdeling af.
In het programma worden de kansen $p_j^{(n)}$ $(j = n, ..., 6n)$ niet door computersimulatie bepaald, maar worden exact berekend via een wiskundige formule. De kansen worden berekend door het herhaald toepassen van de recursieformule

$$p_j^{(t)} = \sum_{k=1}^{6} p_k \, p_{j-k}^{(t-1)}, \qquad j = t, ..., 6t \qquad (2)$$

voor successievelijk $t = 2, ..., n$, startend met $p_j^{(1)} = p_j$ voor $j = 1, ..., 6$. Hierbij geldt de afspraak dat $p_{j-k}^{(t-1)} = 0$ voor $j - k < 6(t-1)$.
De recursieformule (2) staat bekend als de convolutieformule. Dit is een algemeen toepasbare formule die uitermate bruikbaar is in de toegepaste kansrekening. De afleiding van de convolutieformule (2) is niet moeilijk en is gebaseerd op de volgende redenering. In t worpen wordt een totaal van j punten bereikt dan en slechts dan als één van de zes dis-





Figuur 4 Een visuele demonstratie van de centrale limietstelling

junkte gebeurtenissen $A_1, ..., A_6$ optreedt, waarbij A_k de gebeurtenis is dat de eerste worp k punten oplevert en de volgende $t - 1$ worpen in totaal $j - k$ punten. De kans op de samengestelde gebeurtenis A_k is gelijk aan $p_k\, p_{j-k}^{(t-1)}$. Door deze kansen te sommeren over $k = 1, ..., 6$ verkrijgen wij de formule (2).

De convolutieformule (2) is uitermate geschikt voor berekeningen op de computer vanwege het recursieve karakter van de formule. Met name in de toegepaste kansrekening kan het belang van recursieve oplosmethoden niet voldoende beklemtoond worden. Toegepaste kansrekening en stochastische modellen spelen een steeds belangrijkere rol bij het oplossen van praktische problemen, zoals bijvoorbeeld voorraad- en wachttijdproblemen. In een warenhuis met een stochastisch fluctuerende vraag naar een artikel zou het probleem kunnen zijn 'wanneer de voorraad aan te vullen?' en 'met hoeveel de voorraad aan te vullen?' opdat de gemiddelde voorraad- en bestelkosten minimaal zijn onder de eis dat de kans op buiten voorraad raken tijdens de levertijd van een aanvullingsorder beneden een gespecificeerde waarde blijft. Bij een telefoondienst komen verzoeken om inlichtingen bij een team van telefonistes binnen op onregelmatige wijze over de loop van de dag en zou het probleem kunnen zijn hoe groot het team van telefonistes over de verschillende perioden van de dag moet zijn opdat de kans dat een willekeurige klant meer dan een bepaalde tijd moet wachten beneden een gespecificeerde waarde ligt.

3 Slotwoord

Ik hoop dat de ontwikkelde software voor het toepassen van wiskundige methoden in de operations research verder zal bijdragen tot het besef dat de wiskunde niet alleen een boeiende en veelzijdige discipline is maar ook een discipline met een ongekende praktische bruikbaarheid. Het is dan ook vanzelfsprekend dat toegepaste wiskunde een grote plaats inneemt in de huidige wiskundeopleiding aan de universiteiten. Tevens hoop ik in het voorgaande duidelijk te hebben gemaakt dat recursieve algoritmen van wezenlijk belang zijn voor de oplossing van vele wiskundige problemen uit de praktijk.

Drs. F. Heierman en drs. D. Kok ben ik erkentelijk voor hun commentaar op een eerdere versie van het manuscript.

De diskette voor IBM compatible PC's en het bijbehorend lesmateriaal zijn voor middelbare scholen tegen kostprijs en verzendkosten ten bedrage van ƒ25,– te bestellen bij het Instituut voor Econometrie, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, tel. 020-548.7063.

Over de auteur

H. C. Tijms is hoogleraar operations research aan de Vrije Universiteit Amsterdam.

Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: Een verkenning I*

H. Boertien

Dit artikel is in twee delen gesplitst. In dit nummer staat het eerste deel. Daarin wordt een viertal opgaven behandeld, waarin het toepassen van wiskunde centraal staat. In het volgende nummer zal het tweede deel afgedrukt worden, waarin wordt ingegaan op doelen die bij toegepaste wiskunde aan bod komen en welke problemen daarbij ten aanzien van de toetsing optreden.

1 Inleiding

In onze complexer wordende maatschappij wordt van de daarin levende burgers steeds vaker een redelijke beheersing van wiskundige kennis en vaardigheden vereist. Dit geldt niet alleen als men na het avo/vwo een vervolgstudie wil beginnen maar ook als men in ons land de krant of andere algemene publicaties wil kunnen lezen en begrijpen. Het belang dat hierdoor aan het vak wiskunde wordt gehecht, heeft bij het Ministerie van O en W zelfs geleid tot de vraag of het wenselijk is dat wiskunde een voor allen verplicht examenvak wordt.
Als gevolg van de veranderende plaats van wiskunde in onze maatschappij volgt het schoolvak wiskunde in de bovenbouw van het vwo de maatschappelijke veranderingen op de voet. Dit komt onder andere naar voren in de verandering van het examenprogramma voor dit schooltype. Daarbij zijn door een 'herverkaveling' van de vroegere vakken wiskunde I en II de nieuwe vakken wiskunde A en B ontstaan. Zoals bekend is daarmee naast de formele wiskunde (wiskunde B) een ruime plaats gegeven aan toegepaste wiskunde (wiskunde A). Dit gebeurde met name om leerlingen een goede voorbereiding te geven op het gebruik van wiskunde in de vele universitaire gamma-studierichtingen en in diverse andere opleidingen of maatschappelijke situaties.
De veranderingen van het examenprogramma vwo vereisten van de wiskundedocent in dat schooltype niet zozeer het zich eigen maken van bepaalde delen van de formele wiskunde maar veel meer een heroriëntatie op de doelen die met het aanleren van toegepaste wiskunde in het onderwijs nagestreefd dienen te worden. Deze doelen moeten gezien worden in relatie met de functie die het vak wiskunde in de maatschappij heeft gekregen. Opmerkelijk in dit verband is dat noch de doelen van het wiskunde A-programma noch de manieren waarop deze toegepaste wiskunde adequaat getoetst kan worden, afdoende geïnventariseerd en beschreven zijn.
In de volgende paragrafen worden inzichten en stellingnames betreffende (de toetsing van) wiskunde A-doelen behandeld, waarover men heel verschillend kan denken. Het is dan ook niet mijn bedoeling in dit artikel een algemeen geldige en afgeronde theorie betreffende deze problematiek te geven. Dit artikel is bedoeld om de hierna weergegeven gedachten voor te leggen aan de wiskundedocenten in Nederland om het denken over deze problematiek te stimuleren. Deze problematiek speelt niet alleen in de bovenbouw van het vwo en zal in de nabije toekomst mijn inziens ook in de onderbouw van het avo/vwo een grote rol gaan spelen.

2 Voorbeeldopgaven

De term 'wiskunde toepassen' is zo algemeen dat deze voor heel uiteenlopende wiskundige bezigheden gebruikt kan worden. Er wordt wiskunde toegepast als men met behulp van de *abc*-formule een tweedegraads vergelijking oplost. Er wordt ook wiskunde toegepast als men gebruik maakt van de methode van het lineair programmeren om een geschikte instelling van een groot aantal machines in een fabriek te vinden waarbij de produktie maximaal is. Om te verduidelijken wat men precies met

* Met dank aan H. N. Schuring en mevr. drs. G. Theunissen voor hun kritische opmerkingen bij eerdere versies van dit artikel.

de term 'toegepaste wiskunde' bedoelt, wordt daarom vaak van enkele andere termen als 'mathematiseren' en 'transfer' gebruik gemaakt. Maar ook bij het gebruiken van deze termen blijven veel interpretatieverschillen mogelijk. Het is daarom vaak niet duidelijk wanneer men vindt dat er sprake is van het toepassen van wiskunde. Het volgende vraagstukje kan dienen om dit nader toe te lichten:
'Jan, Jannetje en hun jongste eenjarige kind zijn samen 49 jaar oud. Jan en Jannetje zijn even oud en op dezelfde dag jarig. Bereken de leeftijd van Jannetje'.
De een vindt dit eenvoudige 'woordprobleem' geen vraagstuk waarbij er sprake is van 'toepassen van wiskunde', terwijl een ander in principe geen verschil ziet tussen dit probleem en andere veel complexere problemen waarbij een realistische context en vraagstelling zeker maken dat wiskunde toegepast wordt.
Om het begrip 'wiskunde toepassen' nader in te vullen is het allereerst nodig te inventariseren welke vormen van 'wiskunde toepassen' men kan onderscheiden. Vervolgens moet men aangeven op welke wijze wiskundige activiteiten in toepassingssituaties zich onderscheiden van wiskundige activiteiten die in een zuiver formele context plaatsvinden. Pas daarna is het mogelijk aan te geven wat men kan verstaan onder het begrip 'toegepaste wiskunde' en welke consequenties hieruit zijn af te leiden voor het onderwijs in het vak wiskunde A. In dit artikel zal deze werkwijze gevolgd worden. Daarom wordt allereerst voorbeeldmatig ingegaan op vormen van het toepassen van wiskunde.
Hier volgen vier voorbeelden van opgaven die elk een eigen problematiek bij het toepassen van wiskunde aan de orde stellen. De opgaven kunnen alle in principe met de wiskunde die in het vak wiskunde A onderwezen wordt, opgelost worden. Maar opgave 4 vereist wel een beheersingsniveau dat in het algemeen voor leerlingen te hoog is.
Om het vervolg van dit artikel te volgen is het gewenst deze opgaven te maken alvorens men verder gaat lezen.

Opgave 1
Gegeven is de parabool $y = -x^2 + 4$.
Opdracht
Bereken de straal van de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ die de parabool raakt maar niet snijdt.

Opgave 2 (vrij naar de Volkskrant van 23-07-84)
Sean Kelly komt 73 centimeter te kort.

Villefranche – Zelden zal een renner met zo weinig verschil een tijdrit hebben gewonnen als afgelopen zaterdag Laurent Fignon in Villefranche-en-Beaujolais. Na 51 kilometer bleek de gele-truidrager 48 duizendste seconde sneller te zijn geweest dan Sean Kelly. Rekenkundigen wisten te vertellen dat Fignon met een voorsprong van 73 centimeter van de Ier gewonnen zou hebben als beide renners op hetzelfde tijdstip vertrokken zouden zijn. Daarbij wordt dan wel verondersteld dat ze in dat geval tijdens het koersen op de weg niet elkaars manier van rijden onderling beïnvloeden, bijvoorbeeld door bij elkaar in het wiel te rijden of door de snelheid aan die van de ander aan te passen.
Opdracht
Bereken zowel voor Fignon als voor Kelly de tijd in minuten en seconden (in drie decimalen nauwkeurig) die ze nodig hadden om de 51 kilometer af te leggen.
Bereken eveneens voor elk van beiden in kilometers per uur (in drie decimalen nauwkeurig) wat de gemiddelde snelheid over de af te leggen afstand was.

vrijdag 1 mei 1987

Kelly heeft veel probler

Fignon fleurt op

Ook in 1987 kwam Kelly twee tellen te laat.....

Opgave 3
Op een school voor vwo nam in 1986 10% van alle leerlingen van de leerjaren 5 en 6 geen wiskunde in hun vakkenpakket. Van de leerlingen die wel tenminste één wiskundevak A of B kozen, nam twee negende deel alleen het vak wiskunde B in het pakket op. Het vak wiskunde A wordt op die school twee maal zo vaak gekozen als het vak wiskunde B.
Opdracht a
Hoeveel procent van de leerlingen in de leerjaren 5 en 6 kozen alleen wiskunde A in hun vakkenpakket?
Opdracht b
Hoeveel procent van de leerlingen in de leerjaren 5 en 6 kozen zowel wiskunde A als wiskunde B in hun vakkenpakket?

Opgave 4
In de (dier)geneeskunde gebruikt men bij operaties van mensen en dieren dikwijls een injectiespuitje om een verdovings- of narcosemiddel direct in de bloedbaan te brengen. Men noemt dat 'intraveneus spuiten'. Hierdoor verspreidt het middel zich zeer snel door het lichaam waardoor de werking vrijwel onmiddellijk na de inspuiting maximaal is. Voor deze werking is uitsluitend van belang of de hoeveelheid verdovingsmiddel per kilogram lichaamsgewicht (concentratie) boven een bepaalde drempelwaarde ligt. Alleen in dat geval is er sprake van voldoende verdoving (narcose) om operaties uit te voeren.
Zodra het narcosemiddel in het lichaam is opgenomen begint het lichaam deze 'vreemde' stof af te breken. Bij de bepaling hoe lang het ingespoten organisme onder narcose blijft neemt men in het algemeen aan dat er per tijdseenheid een vast percentage van de nog in het lichaam aanwezige stof wordt afgebroken. Men karakteriseert deze afbraaksnelheid veelal door middel van de 'biologische halveringstijd', dat is de tijd die het lichaam nodig heeft om 50% van de hoeveelheid van het verdovingsmiddel dat op zeker moment in het organisme aanwezig is, af te breken.
Het is niet gewenst de hoeveelheid toe te dienen narcosemiddel erg groot te kiezen omdat het middel dan allerlei bijwerkingen waaronder hersenbeschadigingen kan teweeg brengen. Daarom moet er bij elk narcosemiddel voor gezorgd worden dat er in het organisme gedurende de gehele operatie steeds minder narcosemiddel dan een bepaalde maximale hoeveelheid per kilogram lichaamsgewicht aanwezig is. Vandaar dat er bij langdurige operaties vaak niet in één keer een grote hoeveelheid narcosemiddel toegediend wordt, maar dat de toediening op enkele momenten tijdens de operatie wordt uitgevoerd. Verder streeft men er naar de concentratie van het narcosemiddel gedurende de operatie zo laag mogelijk te houden. Op de operatietafel dient men daarom het verdovingsmiddel vaak toe via een infuus. Maar praktische omstandigheden zorgen er voor dat lang niet altijd met deze wens rekening gehouden kan worden. Als er bijvoorbeeld geen infuus voorhanden is of wanneer het gebruik maken van een infuus niet uitvoerbaar is, is de genoemde manier van onder narcose brengen uiteraard niet mogelijk of soms niet geschikt. Wel kan men er altijd voor zorgen dat de concentratie van het verdovingsmiddel aan het eind van de operatie zo laag mogelijk is.
In het algemeen zijn de biologische halveringstijd, de drempelwaarde en de maximaal toegestane concentratie van een narcosemiddel per organisme verschillend. Deze waarden zijn voor het narcosemiddel 'NARCO' bijvoorbeeld voor een koe achtereenvolgens: 30 minuten, 30 en 180 (in milligram per kilogram lichaamsgewicht) en bij een hond achtereenvolgens: 15 minuten, 20 en 80 (in milligram per kilogram lichaamsgewicht).
Een dierenarts kent een aantal operaties die soms langer dan een half uur duren. Voordat hij een dergelijke operatie uitvoert maakt hij in het algemeen een plan waarin hij aangeeft op welke tijdstippen gedurende de operatie hij het best injecties met het narcosemiddel 'NARCO' kan geven en welke hoeveelheden van dit middel hij op elk van deze tijdstippen zal toedienen. Tijdens de operatie wil hij zo min mogelijk extra inspuitingen geven om niet uit zijn concentratie te geraken bij het inspannende werk. Daarbij houdt hij uiteraard rekening met wat voor het toedienen van het narcosemiddel nodig is en zoveel mogelijk met dat wat wenselijk is.
Opdracht a
Maak voor deze dierenarts een 'narcoseplan' voor een operatie van een koe van 500 kg die 45 minuten duurt. Dit plan moet aan de door hem gestelde eisen voldoen.
Beredeneer waarom het plan aan deze eisen voldoet.

Schets het verloop van de concentratie 'NARCO' in het lichaam van het dier.
Opdracht b
Dezelfde opdrachten als bij *a*, maar nu voor de operatie van een hond van 20 kg die eveneens 45 minuten duurt.

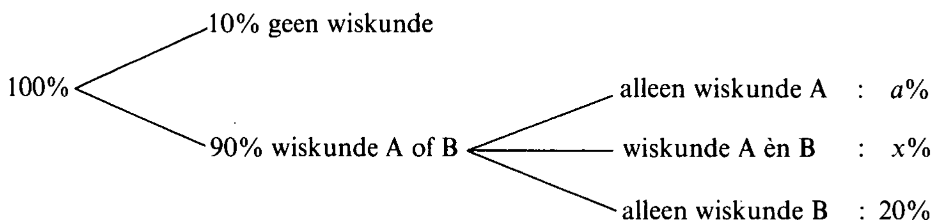
Van deze opgaven worden in het volgende één of enkele oplossingsmethoden besproken. Het is daarbij de bedoeling te beschrijven hoe men er toe kan komen bepaalde wiskundige kennis en vaardigheden bij het oplossen van de problemen te gebruiken, niet om volledigheid na te streven.

2.1 Oplossingen van de opgaven
De opgaven verschillen nogal van karakter. Opgave 1 is beschreven in een formeel-wiskundige context; de opgaven 2, 3 en 4 hebben contexten die realistisch zijn of kenmerken daarvan vertonen. Verder bevatten de opgaven 1, 2 en 3 nagenoeg geen irrelevante gegevens voor de beantwoording van de vraagstellingen, terwijl opgave 4 wel enige overbodige informatie bevat. De opgaven 2 en 3 tenslotte verschillen van elkaar van karakter doordat bij opgave 2 het afronden van getallen tijdens het uitvoeren van berekeningen aan de orde wordt gesteld en bij opgave 3 het omgaan met eenvoudige combinatoriek vereist wordt.
Bij de oplossing van opgave 1 ligt het voor de hand om in een assenstelsel de parabool te tekenen om een indruk te krijgen van de vraagstelling. Als men deze opgave gemaakt heeft, dan kan men zich achteraf afvragen in hoeverre de woorden 'raakt' en 'cirkel' er toe leidden dat men gebruik heeft gemaakt van de relatie dat de straal loodrecht op de raaklijn staat en dat de raaklijn een richtingscoëfficiënt $-2x$ in het punt $(x, -x^2 + 4)$ heeft. Via $\frac{-x^2+4}{x} = \frac{1}{-2x}$ vindt men dan de oplossing.
Voor deze opgave zijn namelijk ook veel andere oplossingsmethoden mogelijk.
Anderen zullen wellicht na een analyse de vraagstelling vertaald hebben in: vindt die waarde(n) van x waarvoor de afstand van de oorsprong tot de parabool minimaal moet zijn. Via de eis dat de uitdrukking $x^2 + (-x^2 + 4)^2$ minimaal moet zijn vindt men de oplossing door gebruik te maken van differentiaalrekening.

Weer een andere oplossing wordt gevonden door het raken van twee figuren te beschouwen als de uitkomst van een limietproces van een rij van elkaar snijdende figuren of als een grensgeval. Als men deze gedachtengang uitwerkt, vertaalt men het probleem in het vinden van die waarde(n) voor r waarvoor het stelsel gegeven door de vergelijkingen $x^2 + y^2 = r^2$ en $y = -x^2 + 4$ maximaal 2 oplossingen heeft. Via de substitutie $x^2 := -y + 4$ in de eerste vergelijking en de eis $D = 0$ krijgt men eveneens de oplossing.
Tenslotte kan men ook een variabel punt op de parabool kiezen en daarbij nagaan waar de loodlijn op de raaklijn aan de parabool in dat punt de y-as snijdt. Als men vervolgens eist dat dit snijpunt de oorsprong is, dan krijgt men de oplossing onder de vooronderstelling dat er een oplossing is. Gezien de vraagstelling is deze vooronderstelling gegrond te noemen. Opvallend is dat hierbij uitsluitend de idee van het raken is gebruikt en de existentie van een oplossing.

Om opgave 2 goed op te lossen is het noodzakelijk een goede voorstelling te hebben van wat het betekent dat iemand over 51 km 48 duizendste seconde sneller is. Namelijk dat de *langzaamste* nog 48 duizendste seconde moet rijden nadat de snelste over de eindstreep gegaan is alvorens deze zelf te passeren. Uit de afstand die gedurende dit korte tijdsinterval afgelegd wordt, is met behulp van de formule $s = v \times t$ de snelheid van de verliezer en zijn totaaltijd te berekenen. Vervolgens is de totaaltijd van de snelste coureur te berekenen en diens snelheid. Een bijkomend probleem bij deze berekeningen is dat de tussenresultaten voldoende nauwkeurig gekozen moeten worden omdat anders er geen verschil tussen de eindantwoorden ontstaat.

Een eerste manier om opgave 3 op te lossen is gebaseerd op het gebruiken van een schema (boomdiagram). Daarbij voert men vrijwel automatisch een tweetal variabelen in, namelijk:
a = het percentage van alle leerlingen die alleen wiskunde A kiezen;
x = het percentage van alle leerlingen die zowel wiskunde A als wiskunde B kiezen.
Met behulp van deze variabelen worden de gegevens als volgt in het schema vertaald:



Voor a en x moet gelden: $a + x = 70$ en
$a + x = 2(20 + x)$,
waarmee a en x eenvoudig te bepalen zijn.
Een tweede manier bestaat daaruit dat men alle leerlingen indeelt in 4 categorieën die zijn aan te duiden met 00, 01, 10 en 11. Hierin betekent 00 'niet A en niet B', 01 'niet A maar wel B', enz. In de volgende tabel en vergelijkingen kan men de gegevens van de tekst verwerken:

A	B	%
0	0	10
0	1	20
1	0	a
1	1	x

Vergelijkingen:
$a + x = 70$
$a + x = 2(20 + x)$

De oplossing is weer eenvoudig te bepalen.

Een derde manier is gebaseerd op een visualisering van de probleemsituatie met behulp van een kruistabel (matrix) of een Venndiagram. Uit deze overzichten wordt vervolgens het tweetal vergelijkingen afgeleid, dat hierboven tot de oplossing van het probleem leidde. Hieronder zijn deze visuele hulpmiddelen weergegeven.

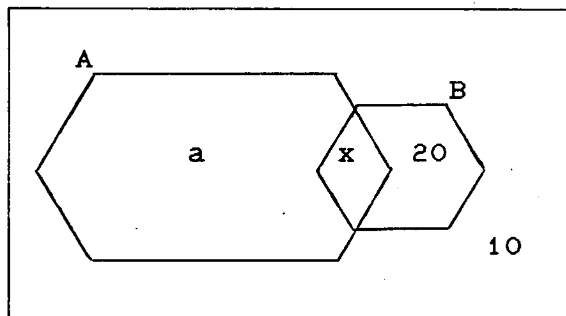
Een vierde mogelijkheid is dat men de *variabelen a, b, x* en *c* invoert, die respectievelijk voorstellen: het percentage van alle leerlingen die alleen wiskunde A, alleen wiskunde B, zowel wiskunde A als wiskunde B, noch wiskunde A noch wiskunde B kiezen. De probleemsituatie wordt daarna vertaald in het volgende stelsel vergelijkingen, dat eenvoudig oplosbaar is:

$$\begin{cases} c = 10 \\ b = \frac{2}{9}(100 - c) \\ a + x = 2(b + x) \\ a + b + x = 90 \end{cases}$$

Bij deze laatste oplossingsmethode is het niet nodig de *variabele c* in te voeren door voor deze direct op grond van de gegevens de waarde 10 te substitueren. Omdat men daarbij in feite toch de tweede vergelijking van het bovenstaande stelsel gebruikt, is deze laatste manier om het probleem op te lossen in principe gelijk aan de voorgaande oplossingsmethode.

Kruistabel/matrix

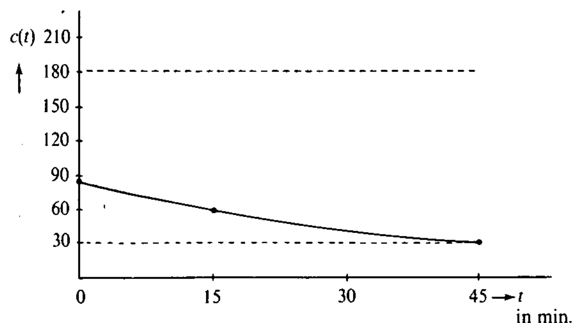
	niet B	B	totaal
niet A	10	20	..
A	a	x	..
totaal	..	..	100



Figuur 1

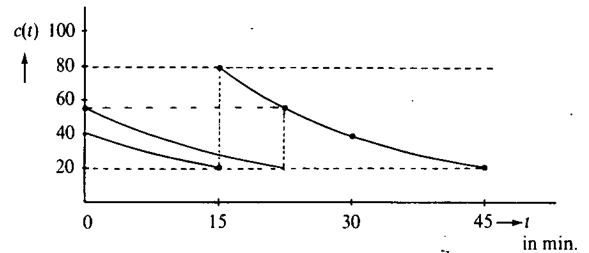
De vierde opgave vergt een vertaling van de probleemsituatie naar een exponentieel 'groei'-model, bijvoorbeeld van de vorm:
$c(t) = c(0) \times (0.5)^t$ met t uitgedrukt in het aantal periodes en $t \geqq 0$; het tijdstip waarop de operatie begint wordt daarbij aangeduid met $t = 0$. De daarbij behorende vraagstelling wordt het eenvoudigst gevonden als men een diagram gebruikt waarin men (eventueel op enkellogaritmisch papier) de concentratie $c(t)$ uitzet tegen de tijd t. Met behulp van de drempelwaarde, de maximaal toelaatbare concentratie en de biologische halfwaarde van 'NARCO' kan dan nagegaan worden hoeveel inspuitingen nodig zijn. Het idee om uit te gaan van de gewenste eindsituatie en het verloop van de concentratie met de tijd levert dan de oplossingsmethode op. Daarnaast moet men berekeningen met logaritmen uitvoeren en gebruik maken van de gewichten van de te opereren dieren om de hoeveelheden verdovingsmiddel die ingespoten moeten worden te bepalen. De oplossingen die toelaatbaar, respectievelijk het meest gewenst zijn, zijn goed te beoordelen vanwege de uitleg die bij de verkregen resultaten gegeven moet worden.
In de volgende diagrammen met bijbehorende opmerkingen zijn de oplossingen kortweg aangegeven.

Operatie van de koe



Uit het geschetste verloop blijkt dat 1 injectie aan het begin van de operatie voldoende is. Deze injectie moet voor een concentratie van $30 \times 2.828427 = 84.85281$ milligram NARCO per kilogram lichaamsgewicht zorgen. In totaal is dan ongeveer 42427 milligram NARCO nodig (naar boven afronden!).

Operatie van de hond



Uit het geschetste verloop blijkt dat er gezien de vraagstelling naast de injectie aan het begin van de operatie precies één injectie tijdens de operatie gegeven moet worden. Het tijdstip waarop deze injectie gegeven moet worden, is variabel tussen $t = 15$ en $t = 30$. Daarom zijn er oneindig veel oplossingen mogelijk die alle gemeen hebben dat er 1 injectie aan het begin van de operatie gegeven wordt en 1 injectie tijdens de operatie.
Als men na 15 minuten de tweede injectie toedient, dan dient men op de beide tijdstippen de volgende hoeveelheden NARCO toe: $20 \times 40 = 800$ milligram en $20 \times (80 - 20) = 1200$ milligram. Dus totaal 2000 milligram NARCO.
Als men na 22.5 minuten de tweede injectie toedient, dan zijn deze bedragen achtereenvolgens:
$20 \times 56.569 = 1131.371$ milligram en
$20 \times 36.569 = 731.371$ milligram. Dus totaal 1863 milligram NARCO. De laatste oplossing is beter en goedkoper.

Over de auteur:
H. Boertien is sedert 1977 aan het CITO verbonden als vakmedewerker voor wiskunde.

Tussenrapport van de nomenclatuurcommissie

Op verzoek van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is begin 1986 een nieuwe nomenclatuurcommissie aan het werk gegaan. Aanleiding hiertoe was de totstandkoming van de nieuwe programma's voor wiskunde A en wiskunde B in de bovenbouw van het vwo. Naast afgevaardigden uit het bestuur en uit de Hewet-begeleidingscommissie hebben in de commissie zitting afgevaardigden van auteursgroepen. De commissie bestaat uit: Leon van den Broek, Ton Kelfkens, Martin Kindt, Theo Korthagen (voorzitter), Wim van der Maaten, Nol van 't Riet en Anne van Streun.
Op dit moment heeft de commissie haar werkzaamheden aan de nomenclatuur voor wiskunde A voorlopig afgerond. In het volgende stuk treft u haar voorstellen aan. Schriftelijke reacties kunnen worden gericht aan de heer Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tot uiterlijk 2 maanden na het verschijnen van dit nummer van Euclides.
Intussen gaat de commissie verder met de ruimtemeetkunde uit het wiskunde B-programma. Wanneer in de toekomst ook op die voorstellen de eventuele commentaren uit het veld zijn verwerkt, zal de commissie met de Cevo definitieve afspraken maken die dan in het Vademecum worden gepubliceerd.
Een punt van beraad binnen de commissie is nog welke gevolgen de voorstellen voor de nomenclatuur bij wiskunde A en wiskunde B hebben voor de onderbouw.
Een enkele maal heeft de commissie zich een opmerking veroorloofd over de *inhoud* van het wiskunde A-programma. Iets, dat strikt genomen buiten haar opdracht valt. Het ontbreken van een toelichting op het examenprogramma heeft de commissie dan ook als een gemis gevoeld. Graag had de commissie bij haar aanbevelingen rekening gehouden met zo'n toelichting.
Tenslotte zij opgemerkt dat de mogelijke keuzeonderwerpen die in de toekomst deel kunnen uitmaken van het examenprogramma wiskunde A, niet door de commissie in haar beschouwingen zijn betrokken.

VOORSTELLEN VOOR DE NOMENCLATUUR BIJ DE EINDEXAMENS WISKUNDE A

1 Inleiding

Tijdens de experimenten met wiskunde A is de afgelopen jaren gebleken dat het goed mogelijk is om een wiskunde A-examen zo in te richten dat elk vraagstuk handelt over een min of meer realistische situatie. Afgaande op die examens kan wiskunde A dan ook getypeerd worden als: het doorgronden van aan de werkelijkheid ontleende situaties met behulp van de in het leerplan genoemde wiskundige hulpmiddelen. Deze opvatting over wiskunde A heeft de commissie geleid tot het volgende *uitgangspunt* bij het nadenken over de vraag, welke termen en notaties op het examen bekend mogen worden verondersteld:
de leerling moet zo weinig mogelijk hinder ondervinden van dwingende nomenclatuurafspraken.

Toepassingsgerichte problemen laten zich altijd verwoorden in termen van de context en in alledaags taalgebruik. Er is daardoor in wiskunde A weinig behoefte aan abstracte wiskundige terminologie. De toegankelijkheid van de problemen moet zo weinig mogelijk belemmerd worden door woorden en symbolen die ook gemist kunnen worden.
De problemen waarmee men in wiskunde A wordt geconfronteerd, zijn vaak ontleend aan toepassingsgebieden zoals natuurkunde, biologie, economie en aardrijkskunde. In deze gebieden treft men veelal geen eenheid in wiskundige terminologie aan. Door zo weinig mogelijk termen en notaties vast te leggen, wil de commissie bereiken dat leer-

lingen later in een ander vak hun terminologie niet te veel moeten veranderen.
Vragen dienen altijd zo geformuleerd te worden, dat er geen verwarring kan ontstaan. Daarom heeft de commissie een beperkt aantal termen en notaties opgesomd die *bekend verondersteld* worden. Deze mogen zonder nadere uitleg in de examens gebruikt worden. Ze zijn voor het formuleren van de opgaven vaak onmisbaar. Een opdracht als 'Teken op dubbellogaritmisch papier de grafiek van T als functie van M' (zie examen 1986 I, opgave 1d) laat zich zonder de begrippen: dubbellogaritmisch papier, grafiek, ... als functie van ... niet bepaald eenvoudig omschrijven. Vandaar dat deze termen in dit rapport tot de 'bekend veronderstelde terminologie' behoren.
De bekend veronderstelde termen en notaties worden alle vermeld in dit tussenrapport. Wil men andere termen en notaties in de examenopgaven gebruiken, dan moeten deze toegelicht worden.
Deze termen en notaties behoeven dus niet te worden vermeld in dit rapport. Toch worden er enkele expliciet genoemd, meestal omdat ze volgens het vorige nomenclatuurrapport wel verplicht waren.
Het verdwijnen van termen en notaties is een gevolg van de invoering van het nieuwe leerplan, gekoppeld aan nieuwe werkwijzen. Hierdoor is het gebruik van verschillende, vroeger zinvolle begrippen en notaties overbodig geworden.
Toelichtingen op gemaakte keuzes zijn steeds tussen de haken ⟨⟨ en ⟩⟩ geplaatst.
Achtereenvolgens treft u de aanbevelingen over de volgende onderdelen van het wiskunde A-programma aan: toegepaste algebra, toegepaste analyse, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, en automatische gegevensverwerking. Met mogelijke keuze-onderwerpen is geen rekening gehouden. Het is denkbaar dat sommige termen of notaties met het oog op een bepaald keuze-onderwerp tijdelijk verschuiven naar de 'bekend veronderstelde terminologie'. Door middel van de officiële omschrijving van het keuze-onderwerp in een circulaire van het ministerie zal dit kenbaar worden gemaakt.

Ter verduidelijking zij tenslotte opgemerkt dat de commissie geen aanbevelingen doet voor het gebruik van termen in het onderwijs. Er zijn wiskundige termen die voor de begripsvorming bijzonder nuttig zijn, maar die niet zijn opgenomen in de lijst van op het examen bekend geachte termen.
Een voorbeeld om dit toe te lichten.
Bij eindexamenvraagstukken over het onderwerp lineair programmeren kan de term *doelfunctie* worden gemist. Vragen over de doelfunctie zullen altijd geformuleerd worden in termen van de context, zoals 'Druk de winst uit in ...', of 'Voor welke ... zijn de kosten minimaal?'
Bij de behandeling van het onderwerp in de klas kan het context-overstijgende begrip doelfunctie echter heel nuttig zijn. Een belangrijk aspect van wiskunde A is ook dat de leerling ervaart dat ogenschijnlijk verschillende problemen onder één wiskundig hoedje te vangen zijn. Een doel van wiskunde A-onderwijs zou kunnen zijn dat de leerling dergelijke context-overstijgende begrippen hanteert bij het bedenken of opschrijven van een oplossing.

2 Toegepaste algebra

2.1 Matrices

- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
  - de elementen van een matrix
  - rij en kolom van een matrix
  - eenheidsmatrix
  - hoofddiagonaal (van een vierkante matrix)
  - symmetrische matrix (t.o.v. de hoofddiagonaal)
- Bij gegeven matrices A en B met passende afmetingen kunnen de volgende *notaties* voorkomen:
  - pA of $p \cdot A$ (p is een reëel getal)
  - $A + B$, de som van A en B
  - AB of $A \cdot B$, het produkt van A en B
  - A^n, de n^e-macht van A ($n = 2, 3, 4, \ldots$)

  De matrices kunnen natuurlijk ook volledig uitgeschreven worden.
  Om bij een overgangsmatrix de 'richting' aan te geven zullen de termen VAN en NAAR altijd bij de rijen en kolommen geschreven worden; en wel als volgt: VAN kolom NAAR rij.

⟨⟨Er zijn twee manieren om een overgangsmatrix te noteren: VAN rij NAAR kolom en VAN kolom NAAR rij.
Laat M een overgangsmatrix zijn in VAN kolom NAAR rij-notatie.

Inputvector $\binom{x}{y}$ gaat onder M over in outputvector $M\binom{x}{y}$.

Dit stemt overeen met de gebruikelijke $f(x)$-notatie. Bij populatievoorspellingsproblemen is deze notatie gangbaar.
Laat M een overgangsmatrix zijn in VAN rij NAAR kolom-notatie.
Dan gaat inputvector $(x\ y)$ onder M over in outputvector $(x\ y)\,M$. Dit stemt overeen met de rekenmachientjes-notatie 'input $\xrightarrow{f}$ output', en is niet ongebruikelijk bij Markov-ketens. Om op de examens verwarring bij de leerlingen te voorkomen heeft de commissie gekozen voor de notatie die in de meeste methodes wordt gebruikt.⟩⟩

- In de examenopgaven zal zonder nadere toelichting *geen gebruik* gemaakt worden van de volgende notaties en termen:
- A is een $i \times j$-matrix (om de afmetingen aan te geven)
- a_{ij} voor het getal in de i^e rij en j^e kolom van matrix A
- namen als 'voorraadmatrix', 'frequentiematrix', 'afstandenmatrix'.

⟨⟨Het heeft geen zin de betekenis van allerlei datamatrices te leren. Ze kunnen in de context altijd eenvoudig worden duidelijk gemaakt.⟩⟩

- de term 'overgangsmatrix'

⟨⟨Overgangsmatrices komen in veel verschillende toepassingen voor. De leerling moet weten dat zo'n matrix overgangen tussen toestanden beschrijft. Wat de preciese werking van een overgangsmatrix is, hangt af van de context. Het heeft geen zin een uitputtende behandeling te geven van contexten waarin overgangsmatrices kunnen voorkomen.
De leerlingen dienen zo veel ervaring te hebben opgedaan dat binnen een context met een korte omschrijving kan worden volstaan.
Formuleringen zoals de volgende moeten begrepen worden:
'De matrix M beschrijft de overgangen over een periode van 6 maanden'
'De overgangskansen vind je in nevenstaande matrix'
'De matrix die de verandering in de bevolkingsopbouw beschrijft ...'⟩⟩

- de termen stabiele of stationaire verdeling (of vector)

⟨⟨Binnen de context is de bedoeling van deze termen altijd goed te verwoorden.⟩⟩

2.2 Grafen
Omdat in wiskunde A niet gewerkt wordt met abstracte grafen, is er geen behoefte aan termen als knopen en kanten, maar zal steeds een bij de context passende woordkeus gebruikt worden.
- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- graaf
- gerichte graaf
- In de examenopgaven zal zonder nadere toelichting *geen gebruik* gemaakt worden van de volgende termen:
- graad van verbondenheid
- diameter van de graaf
- oplossingsmatrix
- verbindingsmatrix, (directe-)wegenmatrix, tweestapswegenmatrix

2.3 Lineair programmeren
- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- lineair programmeringsprobleem
- beperkende voorwaarden
- functie van 2 of 3 variabelen met bijbehorende notatie $f(x, y)$ en $f(x, y, z)$
- iso-...lijnen (of niveaulijnen) en iso-...vlakken (of niveauvlakken); meestal voorkomend met namen uit de context, zoals iso-kostenlijnen.
- In de opgaven zal *geen gebruik* gemaakt worden van:
- logische symbolen of de taal der verzamelingen om het toelaatbare gebied te beschrijven
- de term doelfunctie

⟨⟨De doelfunctie zal bij een lineair programmeringsprobleem worden omschreven in termen van de context, bijvoorbeeld: winstfunctie.⟩⟩

3 Toegepaste analyse

3.1 Functies, grafieken, verbanden en formules

- *Bekend verondersteld* worden de begrippen functie en grafiek.
  Voorbeelden van te gebruiken uitdrukkingen zijn:
  kostenfunctie
  ... is functie van ...
  schrijf ... als functie van ...
  teken de grafiek van ... als functie van ...
  Functies kunnen ook worden omschreven in andere bewoordingen, zoals:
  ... is afhankelijk van ...
  tussen ... en ... bestaat het verband ...
  ... is uitgedrukt in ...
  de formule (grafiek, tabel), die het verband aangeeft tussen ... en ...
  Vaak is een functie door een analytische uitdrukking vastgelegd. Gangbare namen voor die uitdrukking zijn formule en vergelijking.
  Voorbeelden hiervan zijn:
  leid een formule af die H geeft als functie van de tijd
  de vergelijking $E = mc^2$.
  Uiteraard kunnen er ook andere verbanden dan functionele voorkomen, die eveneens met woorden en/of analytische uitdrukkingen kunnen worden vastgelegd. (Denk aan een prooi-roofdiercyclus.)

- Verdere termen die *bekend verondersteld* worden, zijn:
  - maximum/maximale waarde
  - minimum/minimale waarde
  - extreme waarde/uiterste waarde.
- De volgende *notatiewijzen* van de analytische uitdrukking van een functie worden bekend verondersteld:
  - $y = 2x + 3,\quad s_t = 2t + 3,\quad K(p) = 2p + 3$
  - $U = \sqrt{xy},\quad W(x, y) = \sqrt{xy}$
- In de examenopgaven zal *geen gebruik* worden gemaakt van:
  - de pijltjesnotatie voor een functievoorschrift
  - de term tekenverloop (van een functie of een afgeleide functie)
  - de notatie $t \in [2, 3]$
  - de termen: relatie, origineel en beeld, functiewaarde, domein en bereik, lokaal / relatief / absoluut extreem, randextreem, asymptoot, asymptotisch naderen, buigpunt, nulpunt.

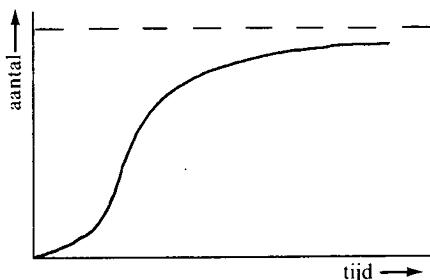
⟨⟨Zoals in hoofdstuk 1 is besproken maakt het karakter van wiskunde A het noodzakelijk, dat aansluiting wordt gezocht bij de terminologie in toepassingsgebieden. Omdat in de analyse een specifieke wiskundetaal, passend bij de functie als bijzondere relatie en bij de logische symboliek, jarenlang in gebruik is geweest, valt het contrast met de hierboven voorgestelde termen en notaties op.
In toepassingen is een functie zoiets als het verband tussen twee grootheden. Zo'n verband kan meer of minder vaag in woorden worden omschreven, of door een reeks getallenparen in een tabel worden vastgelegd, of door een grafiek worden gerepresenteerd.
Notaties als $x \rightarrow \ldots$ of $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \ldots\}$, horend bij respectievelijk het afbeeldingskarakter en het verzamelingskarakter van een functie, zijn in toepassingen niet gangbaar. Zij ontlenen hun bestaansrecht aan de meer abstracte wiskunde. Binnen de toepassingen vormen zij een onnodige belasting voor de leerling.
De keuze om de functie op te vatten als verband tussen twee grootheden impliceert het niet-gebruiken van termen uit de afbeeldingstaal zoals origineel, beeld, domein en bereik. Elk van deze begrippen kan in een opgave worden omschreven in de taal van de context.
Hetzelfde geldt voor termen als buigpunt en asymptoot. Daarvoor kunnen omschrijvingen worden gebruikt zoals: 'Op welk moment begon de stijging van de werkloosheid af te nemen?', of 'Naar welke waarde nadert de winst op den duur?'.⟩⟩

3.2 Grafieken

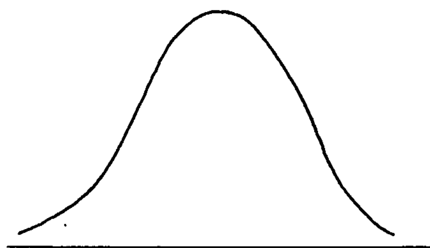
Het tekenen van de grafiek van een functie is bij wiskunde A niet gekoppeld aan de opdracht '*Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f*'. Deze opdracht heeft bij wiskunde B (en in het havo) een bepaalde, welomschreven betekenis. Grafieken in wiskunde A horen bij situaties en kunnen altijd geïnterpreteerd worden in termen van de situatie. Doorgaans zijn over zo'n situatie al een aantal vragen gesteld. De te tekenen grafiek moet in overeenstemming zijn met de al gevonden resultaten. Is men geïnteresseerd in andere karakteristieken van de grafiek (zoals nulpunten, domein, extremen, asymptoten) dan moet er expliciet naar worden gevraagd, in termen van de context.

Van belang is dat bij het maken van de grafiek de gebruikte eenheden en de gekozen schaalverdeling duidelijk worden aangegeven.

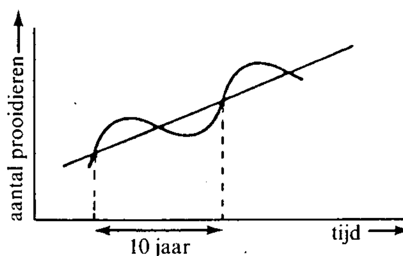
⟨⟨Kenmerkend voor een onderzoek van toegepaste situaties is dat alleen die aspecten van het verband tussen twee grootheden worden onderzocht, die relevant zijn in die situatie.
Soms zijn bijvoorbeeld de snijpunten van de grafiek met de horizontale as voor de te onderzoeken situatie volkomen onbelangrijk, maar heeft juist het snijpunt met de verticale as een bijzondere betekenis.
Vandaar dat de commissie aanbeveelt om eerst expliciet te vragen naar de interessante karakteristieken van het verband, die dan vervolgens in de grafiek moeten worden weergegeven.
De wijzen waarop die karakteristieken in wiskunde A worden opgespoord kunnen nogal verschillen van de methode in wiskunde B. Zo kunnen in toepassingssituaties maxima en minima soms ook bepaald worden met behulp van tabellen, grafieken of een context-redenering.
Als er een onderzoek gewenst wordt naar de aard van een extreme waarde, zal er expliciet naar dat onderzoek moeten worden gevraagd.
Soms kan bij wiskunde A volstaan worden met een tekening die het verloop van een functie aangeeft zonder dat er op de numerieke aspecten hoeft te worden gelet. In dat geval is er sprake van een globale grafiek. Uit de vraagstelling moet dan op te maken zijn welke aspecten van de gegeven situatie goed in beeld moeten worden gebracht.
Voorbeelden van dergelijke globale grafieken zijn:
- een grafiek van geremde groei

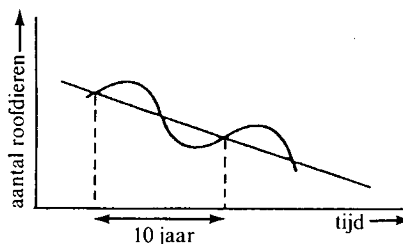


- een plaatje van een normale verdeling



- (*ontleend aan het examen 1984 II.* Nadat bij een grafisch gegeven prooi-roofdiercyclus formules zijn opgesteld voor het aantal roofdieren en het aantal prooidieren als functie van de tijd:)
Door allerlei invloeden van buitenaf, veranderingen in het milieu en jacht, wordt het patroon gewijzigd. De grafieken van het aantal roofdieren en het aantal roofdieren als functie van de tijd zijn globaal weergegeven in onderstaande figuren.





De prooi-roofdiergrafiek verandert door bovengenoemde invloeden. Schets hoe deze grafiek er nu uit komt te zien.⟩⟩

3.3 Differentiaalrekening

- Termen die *bekend verondersteld* worden zijn:
- gemiddelde toename, gemiddelde verandering, gemiddelde snelheid (van verandering)
- snelheid waarmee *K* verandert, stijgt of daalt
- afgeleide, afgeleide functie.

Termen die slechts gebruikt zullen worden met een duidelijke omschrijving zijn:
- steilheid, helling, richtingscoëfficiënt
- stijgend / dalend in een punt of op een interval.

- *Notaties* die bekend verondersteld worden zijn:
- f'
- $\frac{dK}{dx}$
- $\frac{\Delta K}{\Delta x}$

- Termen die *niet gebruikt* zullen worden, zijn:
- differentiequotiënt
- differentiaalquotiënt
- hellingfunctie

3.4 Periodieke functies

- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- periodiek verschijnsel, cyclus
- periode, amplitude, evenwichtsstand
- trend, trendlijn

- De volgende *notaties* worden bekend verondersteld:
- sin
- cos

3.5 Groeimodellen

- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- lineaire groei
- groeisnelheid
- exponentiële groei, groeifactor

⟨⟨Exponentiële groei wordt beschreven door een functie van het type $y = ab^x$. Exponentiële groei veronderstelt de aanwezigheid van een groeifactor. Bij de functie $y = ab^x + c$ groeit het verschil $y - c$ exponentieel.⟩⟩

- logaritmische schaal
- logaritmisch papier, dubbellogaritmisch papier

- De bekend veronderstelde *notaties* zijn:
- log
- ln
- ^{a}log
- e

- In de examenopgaven zal zonder nadere toelichting in de context *geen gebruik* worden gemaakt van de termen:
- geremde groei (of logistische groei)
- grenswaarde bij een geremde groei.

4 Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek

4.1 Beschrijvende statistiek

- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- steekproef en populatie
- absolute en relatieve frequentie, cumulatieve frequentie
- gemiddelde (dat is rekenkundig gemiddelde), modus en mediaan
- standaarddeviatie of standaardafwijking (van een steekproef)
- klasse-indeling, klassebreedte, klassemidden
- histogram, cirkeldiagram, frequentiepolygoon, cumulatief frequentiepolygoon.

⟨⟨Het is in de statistiek wel gebruikelijk om onderscheid te maken tussen staafdigrammen (die een frequentieverdeling van een discrete variabele illustreren) en histogrammen (die bij continue verdelingen passen).
Dit onderscheid is enigszins subtiel, omdat bij het verzamelen van gegevens bij een continue verdeling altijd wordt afgerond op discrete waarden.
De commissie acht het raadzaam niet al te veel belang te hechten aan dit onderscheid en stelt daarom voor op de examens alleen de term histogram te gebruiken.
Bij de grafische voorstelling van een cumulatieve frequentieverdeling moet de conventie in acht worden genomen dat de meetpunten met bovengrenzen van klassen corresponderen.⟩⟩

- Bij de beschrijvende statistiek zullen *geen notaties* worden voorgeschreven. Als in een examenopgave van notaties gebruik wordt gemaakt, bijvoorbeeld *f* voor frequentie, dan zal die notatie in de tekst worden toegelicht. Dit geldt ook voor het sommatieteken Σ.

- Termen die *niet bekend* worden verondersteld, zijn:
- frequentiedichtheid
- somfrequentie
- sectordiagram
- spreidingsbreedte

4.2 Kansrekening

- De volgende termen worden *bekend verondersteld*:
- aselect, trekken met / zonder teruglegging
- simulatie
- boomdiagram
- kansverdeling
- verwachtingswaarde, standaarddeviatie / standaardafwijking (bij een kansverdeling)
- tabel van de binomiale verdeling
- *Notaties* die op het examen gebruikt kunnen worden, zijn:
- een uitdrukking als $P(X \geqq 5)$ waarin X een toevalsvariabele is
- $\binom{n}{k}$
- $n!$

Andere eventueel te hanteren notaties zullen met een verklarende tekst moeten worden vastgelegd.

- *Niet bekend* veronderstelde termen zijn:
- uitkomst, gebeurtenis, uitkomstenruimte of uitkomstenverzameling
- kansmodel, kansruimte, kansveld, symmetrisch kansmodel
- permutatie, combinatie
- stochast, stochastische variabele, toevalsgrootheid
- parameters (bijvoorbeeld bij de binomiale verdeling)
- binomiale verdeling
- binomiaalcoëfficiënt
- hypergeometrische verdeling
- voorwaardelijke kans, (on)afhankelijke gebeurtenissen / stochasten.

4.3 Mathematische statistiek

- De *bekend veronderstelde* termen zijn:
- normale verdeling, normale kromme
- tabel van de standaardnormale verdeling
- normaal waarschijnlijkheidspapier
- continuïteitscorrectie
- nulhypothese, alternatieve hypothese
- significantieniveau
- eenzijdige / tweezijdige toets
- tekentoets
- *Niet bekend* veronderstelde termen zijn:
- toetsingsgrootheid
- kritiek gebied
- overschrijdingskans
- onbetrouwbaarheidsdrempel
- De volgende notaties zullen *niet gebruikt* worden zonder duidelijke omschrijving:
- μ en σ bij een normale verdeling
- H_0 en H_1 voor nulhypothese respectievelijk alternatieve hypothese
- de afkorting α voor significantieniveau.

5 Automatische gegevensverwerking

- *Bekend verondersteld* worden de termen:
- algoritme
- structuurdiagram
- keuzeblok
- herhalingsblok
- programma

⟨⟨Deze worden alleen in de vorm van een structuurdiagram gegeven. Zij dienen zoveel mogelijk computertaal-onafhankelijk te zijn.⟩⟩

- INVOER, UITVOER, ⟨aantal⟩ KEER, STOP
- De volgende *notaties* worden bekend verondersteld:
- voor het vermenigvuldigingsteken het symbool *
- voor het deelteken het symbool /
- voor de toewijzingsopdracht het symbool ←

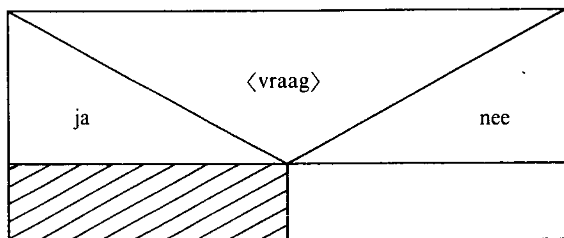
⟨⟨Dit symbool verdient de voorkeur boven := en = vanwege het dynamische karakter.⟩⟩

- een decimale punt in plaats van een komma

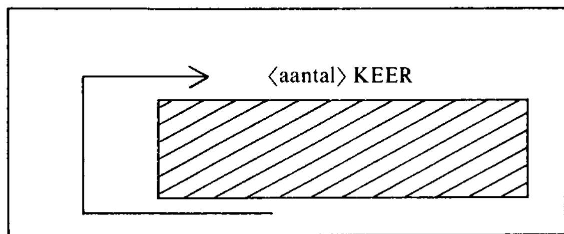
⟨⟨Dus 123.67 in plaats van 123,67⟩⟩

- de gebruikelijke rekenmachine-symbolen, zoals: $\sqrt{}$, sin, cos, +, − en =
- In structuurdiagrammen krijgen de onderstaande *blokken* de aangegeven *vorm*:

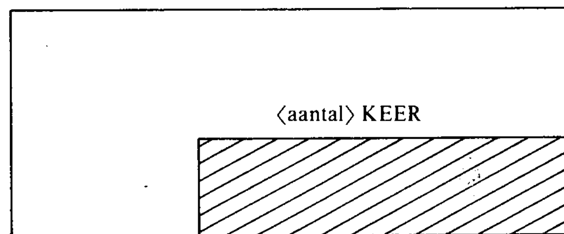
– het keuzeblok



– het herhalingsblok



⟨⟨In de literatuur komt het herhalingsblok vaak in een iets andere vorm voor:



De commissie heeft echter gekozen voor de vorm met de pijl in verband met het meer dynamische karakter daarvan.⟩⟩

- Omdat programma's zo veel mogelijk computertaal-onafhankelijk dienen te zijn, worden termen als INT en RND zonder nadere toelichting *niet bekend* verondersteld.

Mededeling

Nascholingscursussen Wiskunde A in Tilburg

De opleiding wiskunde van de deeltijdopleidingen MO van de Hogeschool Katholieke Leergangen verzorgt in het studiejaar 1987-1988 een tweetal nascholingscursussen rondom het vernieuwd *programma wiskunde A.*
In het najaar van 1987 staat de *Grafentheorie* met zijn toepassingen centraal. Voor een aantal leraren is dit onderwerp in de HEWET-nascholing te summier aan de orde gekomen. Deze cursus geeft u de kans om zich wat meer in de theoretisch-wiskundige achtergronden te verdiepen en kennis te maken met verdere toepassingen.
In het tweede semester komt de *Wiskundige Economie* aan de orde. Eveneens een onderdeel dat in het vernieuwd programma wiskunde A voor het vwo als toepassingsgebied nogal eens aan bod komt. Veel wiskunde-leraren, die in hun eigen opleiding hiermee nooit hebben kennis gemaakt, krijgen de gelegenheid om zich wat meer in de achtergronden ervan te verdiepen.
De cursussen richten zich om te beginnen op 1e graads docenten wiskunde, maar ook andere docenten zijn welkom. Het gaat om 5 avonden van $2\frac{1}{2}$ uur en dit alles vindt plaats in Tilburg op maandagavond tussen 17.00 en 19.30 uur. Het volgen van de cursus is gratis.
Vakinhoudelijke informatie: drs. L. Kuijk, tel. 013-39 46 70
Verdere informatie en inschrijving:
Hogeschool Katholieke Leergangen, Faculteit Educatieve opleidingen, deeltijdopleidingen MO, Pyreneeënweg 3, 5022 DN Tilburg, tel. 013-36 52 75 tst. 26/30.
Inschrijven gaarne vóór 15 juni a.s., onder vermelding „nascholing wiskunde".

Moet Mijnheer Van Dalen blijven wachten?

Hans Aalmoes

In de geschiedenis van de wiskunde zijn velen onsterfelijk. We noemen Euclides, Pythagoras, Euler, Pascal, Gauss en Einstein. Maar niemand is zo onsterfelijk als onze eigen mijnheer Van Dalen, die naar mijn weten al meer dan een halve eeuw op antwoord zit te wachten.

Dat kinderen eerder geneigd zijn gebruik te maken van een regeltje dan van hun gezond verstand is bekend. Leerlingen uit de hoogste klassen van havo en vwo hebben vaak houvast aan regels die zij kunnen gebruiken bij het oplossen van opgaven. Eerlijk gezegd, hebben wij het er ook wel een beetje naar gemaakt. Het directe resultaat van het mededelen van een truc of regel is een dankbare leerling die zich voorlopig geholpen voelt.
Nu mag dat best eens, met name tegen de tijd van de examens zal iedere leraar zich wel eens bedienen van een instrumentele uitleg: doe dit nu maar gewoon zo, want meestal werkt dat. Maar wanneer wij leerlingen wiskunde willen leren, proberen we juist dat echte denken te ontwikkelen. Als je aan kinderen vraagt hoe zij kunnen zien of een getal deelbaar is door drie dan weten ze wel iets te vertellen over de som der cijfers, maar als je gewoon wilt weten of duizend deelbaar is door zeven, komt bijna niemand op het idee de deling uit te voeren. Een regeltje wordt onthouden, maar wat delen nu eigenlijk is weten ze niet.
Frappant is hoe kinderen de voorrangsregels bij een aantal bewerkingen beleven. Ik ging dat eens nader bekijken, nadat ik een aantal leerlingen, zelfs in de derde en vierde klas havo, had zien worstelen met opgaven als -2^4, waar heel vaak 16 uitkwam.

De leerlingen vonden het verwarrend dat:

$$\begin{aligned} -2^4 &= -16 \\ (-2)^4 &= 16 \\ -2^3 &= -8 \\ (-2)^3 &= -8 \end{aligned}$$

Bij -2^4 zeg je niets tegen leerlingen over de afspraak dat je eerst moet machtsverheffen en pas daarna kunt vermenigvuldigen. Waarbij je je nog moet afvragen of leerlingen die vermenigvuldiging van 2^4 met -1 wel direct zien.
Vier-havoleerlingen komen ook in de problemen bij $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ als zij $f(-4)$ moeten uitrekenen. Ze hebben bijna altijd gehoord van de regel 'Mijnheer van Dalen wacht op antwoord', maar twijfelen sterk of ze eerst de helft van -4 moeten nemen dan wel een andere vreemdsoortige manoeuvre moeten uithalen. Maar... zij weten tenminste nog wat machtsverheffen is en wat worteltrekken is, terwijl brugklassers deze regel wel in hun rugzak hebben zonder enige notie van deze bewerkingen. Nu zijn er gelukkig ook alternatieven. Mijn vader leerde mij destijds 'Hoera, Van Dalen at oliebollen', waarmee tevens de prioriteit van de haakjes werd aangegeven. En tegenwoordig, zo heb ik begrepen, laat men ook de leerlingen 'veertien dagen op Ameland' zitten om er de voorrangsregels te verwerken. Hoe dan ook, het is voor jonge kinderen een verschrikkelijke regel, want plotseling geldt de voorrang weer niet voor het optellen ten opzichte van het aftrekken. (De bewerking 'bijtrekken' bestaat alleen bij Studio Sport in blessuretijd.) Eén ding is zeker, de regel, het ezelsbruggetje leeft totaal niet. Om dat eens na te gaan heb ik mijn brugklasleerlingen drie opgaven voorgelegd:

a $3 + 2 \times 2$
b $5 - 2 + 1$
c $4 + 8 : 2$

waarna ik vraag d stelde of zij wel eens gehoord hadden van de regel van mijnheer Van Dalen en zo ja (vraag e) wat die betekende.

Nu is het echt niet zo moeilijk om verbijsterende resultaten te krijgen als je kinderen iets vraagt wat je net hebt verteld of om te constateren dat leerlin-

gen de bij wiskunde opgedane kennis bij natuurkunde niet kunnen toepassen.
Maar hiér wilde ik opmerken dat op één na alle leerlingen gehoord hadden van de regel van Van Dalen. Zes van de 26 kinderen maakten de drie sommetjes foutloos. De meeste kinderen wisten wel te vertellen wat de V, D enzovoorts betekenden, maar slechts zeven konden dat in verband brengen met de voorrang van de verschillende bewerkingen. En van deze zeven waren er nog maar twee die alle drie de opgaven juist beantwoordden.

Esther:
a $3 + 2 \times 2 = 10$
b $5 - 2 + 1 = 4$
c $4 + 8 : 2 = 6$
d Ja
e Dat je eerst × moet doen en dan : en dan worteltrekken en dan + of −, maar dat maakt niet uit wat je eerst doet bij + of −

Toen ik Esther vroeg wat worteltrekken was, wist ze dat niet. Tien andere kinderen konden daar wel antwoord op geven. Zij beantwoordden een controleopgave ($\sqrt{36}$) goed.

Marcel:
a $3 + 2 \times 2 = 7$
b $5 - 2 + 1 = 2$
c $4 + 8 : 2 = 8$
d Ja
e Delen, worteltrekken, optellen, aftrekken
De volgorde wat je eerst moet doen

Marcel was één van de dertien kinderen die de voorrang van het vermenigvuldigen en delen goed wist toe te passen. Hij kende ook Van Dalen maar verslikte zich in een vermeende voorrang van het optellen. En met Marcel waren er nog zes leerlingen die opgave a goed hadden en bij b de fout ingingen.

Dennis:
a $3 + 2 \times 2 = 7$
b $5 - 2 + 1 = 4$
c $4 + 8 : 2 = 8$
d Nee
e Weet ik niet

Dennis had gewoon geleerd dat je eerst moet vermenigvuldigen en delen.

Wat moeten we nu met mijnheer Van Dalen? Er wordt op de basisschool in groep 8 over gesproken, maar een regel met zo veel haken (eerst de haakjes trouwens) en ogen (ogenschijnlijk eerst optellen, maar dat is niet zo) is op dat moment onbruikbaar. Dat kinderen iets moeten weten van voorrangsregels, kan geen kwaad. Maar waarom dan niet gewoon een paar afspraken. In de wiskunde worden zo veel afspraken gemaakt, het had ook anders gekund net als de voorrangsregels in het verkeer. Weliswaar zijn het afspraken die met het oog op het vervolg van de leerstof logisch zijn; dat mag verteld worden.

Dit is alleen nog maar mijnheer Van Dalen. En dan te bedenken dat er heel veel regeltjes zijn die leerlingen te pas en te onpas willen gebruiken. Nogmaals, het kan soms wel eens effectief zijn. Een ezelsbruggetje om het geheugen een beetje te helpen mag ook, maar wat mijnheer Van Dalen betreft vraag ik mij af of hij nog lang op antwoord moet blijven wachten.

Hans Aalmoes

Over de auteur:
Hans Aalmoes is leraar wiskunde aan de RSG te Schagen. Hij was als vakdidacticus werkzaam in het Mavo Project en momenteel is hij verbonden aan het SJO, een ondersteuningsaanbod voor scholen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Martin Gardner heeft als bijdrage aan Issac Asimov's Science Fiction Magazine een serie zg. Science Fiction Puzzle Tales geschreven. Het zijn heel gewone wiskunde-puzzels die aan science fiction alleen maar herinneren door de woordkeus. Een deel ervan is verenigd in het boek *Puzzles from other Worlds*, dat sinds 1984 in de Dover edition verkrijgbaar is. Het aardige is dat na het antwoord van iedere opgave een nieuwe, moeilijkere opgave volgt en dat zich soms nog één of twee keren herhaalt. Hier volgt de eerste opgave uit het boek plus het moeilijkere vervolg.

566 Op een schaakbord staan vijf stukken: een koning, een dame, een toren, een loper en een paard. Ze staan op de vijf plaatsen die met een ster zijn aangegeven. In drie vakken staat het cijfer 2. Dat betekent dat deze velden door precies twee van de vijf stukken aangevallen worden. Waar staat elk van deze vijf stukken?

	a	b	c	d	e	f	g	h
8				•				
7	2						•	
6								
5		•					2	
4								
3			•		•			
2								
1				2				

567 Op het bord staan weer de vijf stukken K, D, T, L en P, waar is onbekend. In enige velden staat aangegeven door precies hoeveel van de stukken ze aangevallen worden. Waar staan de vijf stukken?

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								0
7		3	2	1				
6		2						
5		1						
4					1	2		
3					2		2	
2						2	3	
1								

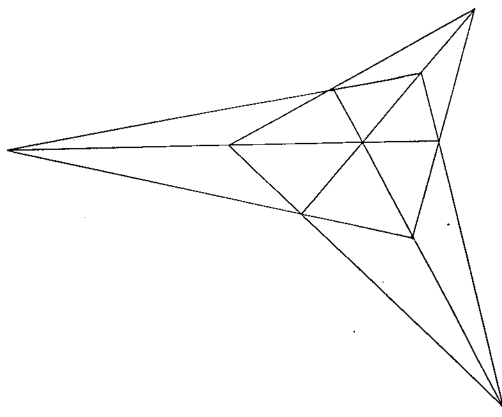
568 Gegeven is een 'dambord' met 81 velden. Twee velden heten samenhangend als ze een hoekpunt of een zijde gemeen hebben. Zet op de velden natuurlijke getallen groter dan 1, zo dat twee getallen op samenhangende velden onderling ondeelbaar zijn. Doe dit zo dat het grootste getal minimaal is.
Er zijn verschillende oplossingen. Kies er een waarvan de som van de getallen bovendien minimaal is.

Oplossingen

563 Bewijs dat de enige oplossing van
$x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$ (1)
in $\mathbb{Z}$ is: $x = y = z$.
Uit (1) volgt:
$x^2 - y^2 = z - y$
$(x - y)(x + y) = z - y$
Hieruit volgt dat $|z - y|$ deelbaar is door $|x - y|$.
Evenzo vinden we:
$|x - z|$ is deelbaar door $|y - z|$
$|y - x|$ is deelbaar door $|z - x|$.
Waaruit volgt dat $|x - y| = |y - z| = |z - x|$.
En dus $x = y = z$.

564 Kies 10 punten. Kies daarna n rechten zo, dat door elk van de 10 punten precies 3 van deze rechten gaan. Kies de 10 punten zo, dat men met een minimaal aantal rechten volstaan kan. Hoe groot is dit minimale aantal?
Een oplossing met 9 rechten staat hieronder.

Een oplossing met 8 rechten is niet mogelijk. Want 8 rechten hebben maximaal 28 snijpunten. Als door 10 punten elk 3 rechten gaan, zijn minimaal $10 \cdot 3 = 30$ snijpunten vereist.
Grappig is dat de opgave gemakkelijker wordt als we niet 10 maar 12 punten kiezen. Het getal 12 bevordert een goede ingeving. Het minimum blijft 9. Probeer het maar.



565 Uit de getallen 1 tot en met 100 kiest men aselect 5 verschillende getallen. Wat is de verwachtingswaarde van het kleinste getal?
Neem een bepaalde keuze, bijv. 7, 23, 58, 81, 90. Voor deze rij zetten we het getal 0 en erachter het getal 101. We krijgen 0, 7, 23, 58, 81, 90, 101. De intervallen tussen deze getallen zijn resp. 7, 16, 35, 23, 9, 11. Permuteer deze intervallen. Een van deze permutaties is 16, 35, 9, 23, 11, 7. Daarbij horen de getallen 0, 16, 51, 60, 83, 94, 101. Beschouwt men nu alle keuzen van 5 getallen en alle permutaties van de bijbehorende intervallen, dan ziet men dat het eerste interval gemiddeld even groot is als het tweede, het derde, het vierde, het vijfde en het zesde. De verwachtingswaarde van het kleinste getal is dus $\frac{1}{6} \cdot 101$ (en die van de overige getallen $\frac{2}{6} \cdot 101, \ldots, \frac{5}{6} \cdot 101$).
Als het aantal gekozen getallen k bedraagt is de verwachtingswaarde van het kleinste getal analoog $\frac{1}{k+1} \cdot 101$.
Nu het geval dat de getallen niet verschillend hoeven te zijn. Onderstel we kiezen k getallen uit de getallen 1 tot en met n. De kans dat het kleinste getal 1 is, is $\frac{n^k - (n-1)^k}{n^k}$. De kans dat het kleinste getal tot de eerste 2 behoort, maar niet 1 is, is
$$\frac{n^k - (n-2)^k - (n^k - (n-1)^k)}{n^k} = \frac{(n-1)^k - (n-2)^k}{n^k}.$$
...
De kans dat het kleinste getal tot de eerste 3 behoort, maar niet tot de eerste 2, is $\frac{(n-2)^k - (n-3)^k}{n^k}$.
De kans dat het kleinste getal $n-1$ is, is $\frac{2^k - 1^k}{n^k}$. De kans dat het kleinste getal n is, is $\frac{1^k}{n^k}$. De verwachtingswaarde van het kleinste getal is dan
$$\frac{1}{n^k}(1n^k - 1(n-1)^k + 2(n-1)^k - 2(n-2)^k + 3(n-2)^k -$$
$$- 3(n-3)^k + \ldots + (n-1)(2^k - 1^k) + n1^k) = \frac{1}{n^k}\sum_1^n i^k$$

Kalender

11 sept. 1987: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
31 okt. 1987: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Mededeling

Abdelaali Benchekroun: wiskundeleraar en gewetensgevangene

Abdelaali Benchekroun, geboren in 1954 te Marakech, Marokko, werd in 1974 benoemd tot wiskundeleraar aan het Centre Pédagogique Régional de Casablanca, Marokko. Tijdens zijn studie was hij een actief lid van verscheidene studentenbewegingen en in 1972 werd hij daarom voor het eerst gearresteerd.
Van eind 1974 tot begin 1976 heeft hij, geboeid en geblinddoekt, doorgebracht in eenzame opsluiting, zonder dat zelfs zijn familie op de hoogte werd gesteld van zijn verblijfplaats. Gedurende die periode werd hij bovendien regelmatig buitengewoon wreed behandeld.
In 1977 werd hij eindelijk berecht en veroordeeld tot dertig jaar gevangenisstraf, uitsluitend omdat hij lid was geweest van een 'verboden' vereniging, die een bedreiging voor de Marokkaanse heersers zou hebben gevormd. Sinds zijn berechting zit hij gevangen in de centrale gevangenis van Kénitra, Marokko.
Omdat Abdelaali Benchekroun nooit geweld heeft gebruikt, noch ooit heeft gepleit voor het gebruik van geweld, heeft *Amnesty International* (AI) hem geadopteerd als een gewetensgevangene. AI tracht naleving van de 'Universele Verklaring van de Rechten van de Mens' te bewerkstelligen, o.a. door te werken voor de vrijlating en menswaardige behandeling van gewetensgevangenen.
Leden van AI schrijven regelmatig brieven naar allerlei Marokkaanse gezagdragers om te pleiten voor vrijlating van Abdelaali Benchekroun, maar ook niet-leden kunnen naar de autoriteiten van Marokko schrijven, om te vragen om vrijlating en een menswaardige behandeling van deze Marokkaanse wiskundeleraar.
AI zou graag zien, dat zoveel mogelijk Nederlandse wiskundeleraren een brief schrijven aan de Marokkaanse gezagdragers, waarin ze vertellen, dat ze op de hoogte zijn van de slechte behandeling en onrechtvaardige gevangenschap van Abdelaali Benchekroun.
Voorbeeldbrieven, die alleen moeten worden overgetypt, zijn te verkrijgen bij:
Amnesty International, afd. Nederland,
Groep Hilversum,
Postbus 1623,
1200 BP Hilversum.
Tel.: 035-4 34 02.
Informatie over de zaak Abdelaali Benchekroun kan worden aangevraagd bij:
Simon van der Salm,
Bodemanstraat 15,
1216 AH Hilversum.
Tel.: 035-1 76 86.

Namens AI-Hilversum: Simon van der Salm, leraar wiskunde en informatica aan de HTS/MTS voor Elektronica te Hilversum.

Inhoud

Adressen van auteurs

H. Aalmoes, Spreeuwenlaan 27, 1742 GA Schagen

H. Boertien, p/a CITO Postbus 1034, 6801 MG Arnhem

C. Nagtegaal, Park Arenberg 37, 3731 EN De Bilt

Prof. dr. H. C. Tijms, Vrije Universiteit
Instituut voor Econometrie, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam